

## 7. Теорія відносності

У просторі Мінковського положення *світової точки* задається чотири-вектором координат  $x^\mu$ . Ми будемо розглядати простір Мінковського, в якому *контраваріантні* (з верхніми індексами) і *коваріантні* (з нижніми індексами) складові чотири-вектора  $A^\mu$  пов'язані співвідношенням:

$$A^0 = A_0, \quad A^i = -A_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Якщо система відліку  $K'$  рухається відносно  $K$  зі швидкістю  $V$  уздовж осі  $x$ , то при переході від однієї системи до іншої компоненти чотири-вектора перетворюються за законом перетворення тензора першого рангу:

$$A^\mu = \alpha_\nu^\mu(\beta) A'^\nu, \quad A'^\mu = \alpha_\nu^\mu(-\beta) A^\nu, \quad (7.1)$$

де маємо на увазі *правило сум Айнштайна*: за індексами, що повторюються двічі (раз згори і раз знизу) відбувається підсумовування від 0 до 3. Матриця перетворення

$$\alpha_\nu^\mu(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тут введено скорочені позначення  $\beta = V/c$ ,  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ . Переходи між контраваріантними і коваріантними складовими здійснюють за допомогою метричного тензора  $g_{\mu\nu}$ :

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu, \quad A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu. \quad (7.2)$$

де метричний тензор визначається матрицею

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

У формалізмі чотири-векторів деякі величини, які використовують в описі електромагнітного поля, означають так:

1) чотири-вектор координати

$$x^\mu = (ct, \mathbf{r}), \quad x_\mu = (ct, -\mathbf{r}).$$

Тобто його контраваріантні компоненти  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ .

Для чотири-вектора координати, розписуючи (7.1) покомпонентно, отримаємо так звані **перетворення Лоренца**:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (7.3)$$

Для компонент звичайного вектор швидкості  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  справедливий **релятивістський закон додавання швидкостей**:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}, \quad (7.4)$$

тобто вони не є компонентами 4-вектора. Натомість чотири-швидкість визначають як похідну від вектора  $x^\mu$  за **власним часом**  $\tau$ :

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad d\tau = dt\sqrt{1 - \beta^2}. \quad (7.5)$$

Аналогічно отримують чотири-прискорення  $w^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}$ .

2) чотиривимірний потенціал електромагнітного поля

$$A^\mu = (\varphi, \mathbf{A}),$$

де  $\varphi$  і  $\mathbf{A}$  — векторний і скалярний потенціали відповідно.

3) чотири-вектор густини електричного струму

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{j}),$$

де  $\rho$  і  $\mathbf{j}$  — густини струму і заряду відповідно.

4) чотиривимірний хвильовий вектор

$$k^\mu = \left( \frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right),$$

де  $\omega$  і  $\mathbf{k}$  — відповідно частота і хвильовий вектор плоскої електромагнітної хвилі.

У просторі Мінковського складові векторів  $\mathbf{E}$  та  $\mathbf{B}$  є компонентами антисиметричного *тензора електромагнітного поля*  $F^{\mu\nu}$ :

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}; \quad F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu}. \quad (7.6)$$

Матриця 4-тензора  $F^{\mu\nu}$  має вигляд:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Рівняння Максвелла можна записати у контраваріантній формі через тензор електромагнітного поля так:

$$\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = 0, \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (7.8)$$

Компоненти чотири-тензора перетворюються як добуток компонент двох чотири-векторів. Для чотири-тензора другого рангу закон перетворення має вигляд:

$$F^{\mu\nu} = \alpha^\mu_\rho \alpha^\nu_\sigma F'^{\rho\sigma}. \quad (7.9)$$

Із (7.6) та (7.9) формули перетворення компонент тензора електромагнітного поля є такими:

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & E_y &= \gamma(E'_y + \beta B'_z), & E_z &= \gamma(E'_z - \beta B'_y), \\ B_x &= B'_x, & B_y &= \gamma(B'_y - \beta E'_z), & B_z &= \gamma(B'_z + \beta E'_y). \end{aligned}$$

У векторній формі ці рівняння мають компактний вигляд:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\parallel &= \mathbf{E}'_\parallel, & \mathbf{E}_\perp &= \gamma(\mathbf{E}'_\perp - [\mathbf{V}, \mathbf{B}']/c), \\ \mathbf{B}_\parallel &= \mathbf{B}'_\parallel, & \mathbf{B}_\perp &= \gamma(\mathbf{B}'_\perp + [\mathbf{V}, \mathbf{E}']/c), \end{aligned}$$

де  $\mathbf{E}_\parallel, \mathbf{B}_\parallel$  — проєкції векторів  $\mathbf{E}$  та  $\mathbf{B}$  на напрямок швидкості  $\mathbf{V}$ , а  $\mathbf{E}_\perp, \mathbf{B}_\perp$  — їх проєкції на площину, перпендикулярну до  $\mathbf{V}$ .

109. Знайдіть компоненти 4-вектора швидкості.
110. Виразіть компоненти 4-вектора прискорення через тривимірну швидкість і прискорення.
111. Узагальніть формули перетворення Лоренца для довільної орієнтації осей координат обох систем відліку щодо напрямку їх відносного руху.
112. Виведіть закон перетворення для тривимірного вектора швидкості при переході від однієї системи відліку до іншої у випадку довільної орієнтації осей координат. Покажіть, що за абсолютною величиною результуюча швидкість

$$v = \frac{\sqrt{(\mathbf{v}' + \mathbf{V})^2 - [\mathbf{v}', \mathbf{V}/c]^2}}{1 + (\mathbf{v}', \mathbf{V})/c^2}.$$

113. Виведіть закон перетворення для тривимірного вектора прискорення при переході від однієї системи відліку до іншої у випадку довільної орієнтації осей координат.
114. Виведіть закон перетворення для  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , де  $v$  — швидкість матеріальної точки відносно розглядуваної системи відліку.
115. Ракета рухається прямолінійно зі сталим прискоренням  $a_0$  у власній системі відліку. Скільки часу (за “земним годинником”) триватиме розгін ракети до швидкості  $v_1 = 0.8c$ ?
116. Годинник рухається вздовж осі  $x$  системи  $K$  зі швидкістю  $u$ . Як зміняться покази годинника в системі  $K'$ , яка рухається зі швидкістю  $v$  відносно системи  $K$ ?
117. Виберемо за годинник циліндричну порожнину висотою  $l$  з абсолютно відбивними стінками, між якими рухається імпульс світла. Період колювання такої системи рівний  $t = 2l/c$ . Знайдіть період колювання такого годинника, якщо він рухається зі швидкістю  $\mathbf{v}$ .
118. Два однакових стрижні довжиною  $l_0$  (у “власній” або супутній системі відліку) розміщені вздовж прямої і рухаються назустріч один одному з однаковими швидкостями  $v$  (відносно деякої системи відліку). Яка довжина одного зі стрижнів у системі відліку, пов'язаній з другим?
119. Переконайтесь в інваріантності квадратичної форми

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2$$

при перетвореннях Лоренца.

120. Доведіть, що метричний тензор інваріантний при перетвореннях Лоренца.

121. Запишіть перетворення Лоренца для симетричного тензора другого рангу.
122. Запишіть перетворення Лоренца для антисиметричного тензора другого рангу.
123. Знайдіть перетворення Лоренца для компонент тензора електромагнітного поля  $F^{\mu\nu}$ .
124. Знайдіть вираз для інваріанта  $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$  через електричне та магнітне поля.
125. Знайдіть вираз для інваріанта  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$  електромагнітного поля. Тут  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  — узагальнення символу Леві-Чівіті (повністю антисиметричний тензор четвертого рангу).
126. У вакуумі відносно деякої системи координат ( $K$ ) є взаємно перпендикулярні електричне ( $\mathbf{E} = \text{const}$ ) і магнітне ( $\mathbf{B} = \text{const}$ ) поля, причому  $E < B$ . Вкажіть таку систему відліку ( $K'$ ), відносно якої поле чисто магнітне, і знайдіть його індукцію.
127. У вакуумі відносно деякої системи координат ( $K$ ) є взаємно перпендикулярні електричне ( $\mathbf{E} = \text{const}$ ) і магнітне ( $\mathbf{B} = \text{const}$ ) поля, причому  $E > B$ . Вкажіть таку систему відліку ( $K'$ ), відносно якої поле чисто електричне, і знайдіть його напруженість.
128. В інерціальній системі координат  $K$  є лише однорідне електричне поле  $\mathbf{E}$ . Знайдіть модулі векторів  $\mathbf{E}'$  і  $\mathbf{B}'$  в системі координат  $K'$ , яка рухається відносно системи  $K$  зі сталою швидкістю  $\mathbf{v}$  під кутом  $\alpha$  до вектора  $\mathbf{E}$ .
129. В інерціальній системі координат  $K$  є однорідні електричне  $\mathbf{E}$  й магнітне  $\mathbf{B}$  поля одного напрямку. Знайдіть модулі векторів  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{B}'$  та кут між ними в системі координат  $K'$ , яка рухається зі сталою швидкістю  $\mathbf{v}$  в напрямку, перпендикулярному до векторів  $\mathbf{E}$  і  $\mathbf{B}$ .

130. Знайдіть швидкість системи відліку, в якій електричне і магнітне поля паралельні. Розгляньте випадок руху системи координат перпендикулярно відносно площини, в якій лежать вектори  $\mathbf{E}$  та  $\mathbf{B}$ .
131. Розрахуйте потенціали електромагнітного поля, яке створює у вакуумі точковий зарядом  $e$ , що рухається рівномірно і прямолінійно зі швидкістю  $\mathbf{v}$ .
132. Обчисліть напруженість електричного  $\mathbf{E}$  та індукцію магнітного  $\mathbf{B}$  полів для точкового заряду  $e$ , що рухається у вакуумі рівномірно і прямолінійно зі швидкістю  $\mathbf{v}$ .
133. Знайдіть електромагнітне поле точкового електричного диполя з моментом  $\mathbf{d}$ , який рухається зі сталою швидкістю  $\mathbf{v}$ .
134. Користуючись інваріантністю заряду щодо переходу між інерціальними системами відліку, переконайтесь на прикладі рівномірно рухомого точкового заряду в тому, що величини  $(c\rho, \mathbf{j})$  справді утворюють 4-вектор  $j^\mu$ .
135. Монохроматичне світло частоти  $\omega_0$  падає нормально на поверхню плоского дзеркала, яке рухається рівномірно зі швидкістю  $\mathbf{v}$  в напрямку поширення світла. Знайдіть частоту відбитого світла.
136. Монохроматична плоска електромагнітна хвиля частоти  $\omega_1$  падає під кутом  $\alpha_1$  на плоске дзеркало, яке рухається зі швидкістю  $\mathbf{v}$  в напрямку своєї нормалі назустріч падаючій хвилі. Визначте кут відбивання від рухомого дзеркала  $\alpha_2$  і частоту відбитої хвилі  $\omega_2$ .
137. Визначте закон руху релятивістської зарядженої частинки масою  $m$  і зарядом  $e$  в однорідному постійному магнітному полі.

138. Визначте закон руху релятивістської зарядженої частинки масою  $m$  і зарядом  $e$  в однорідному постійному електричному полі.
139. Вважаючи, що при малих швидкостях  $p^2 \ll (mc)^2$ , де  $p$  — імпульс частинки, знайдіть наближену залежність енергії частинки від її імпульсу з точністю до  $\left(\frac{p^2}{m^2c^2}\right)^2$ .
140. Знайдіть загальну формулу для функції Лагранжа системи заряджених частинок. Випромінюванням нехтуємо.
141. Обчисліть функцію Лагранжа системи заряджених частинок з точністю до  $1/c^2$  включно.
142. Обчисліть функцію Лагранжа системи заряджених частинок у наближенні їх рівномірного руху.
143. Частинка з енергією  $W_0$  і масою спокою  $m$  налітає на нерухому частинку масою  $M$ . Знайти енергію розсіяної частинки як функцію кута розсіяння.



## 8. Електродинаміка середовища

Під впливом електромагнітного поля в середовищі виникають так звані *індуковані (зв'язані) заряди і струми*, спричинені внутрішньомолекулярним перерозподілом заряджених частинок.

Густини зв'язаних зарядів  $\rho'$  та струмів  $\mathbf{j}'$  виражають через вектори поляризації  $\mathbf{P}$  та намагніченості  $\mathbf{M}$ :

$$\rho' = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \quad \mathbf{j}' = c \operatorname{rot} \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (8.1)$$

Для опису електричного та магнітного поля зручно використовувати величини:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}, \quad (8.2)$$

де  $\mathbf{D}$  — вектор електричного зміщення (електрична індукція),  $\mathbf{H}$  — напруженість магнітного поля

З системи рівнянь (2.3), відокремлюю внески зв'язаних зарядів і струмів, отримуємо рівняння Максвелла в середовищі:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= 4\pi \rho_0(\mathbf{r}, t), \\ \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

де  $\rho_0(\mathbf{r}, t)$  та  $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t)$  — відповідно густини вільних зарядів і струмів.

Вектори поляризації та електричної індукції для переважної більшості речовин досить просто пов'язані з напруженістю електричного поля:

$$\mathbf{P} = \varkappa \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (8.4)$$

де  $\varkappa$  — діелектрична сприйнятливність, а  $\varepsilon = 1 + 4\pi \varkappa$  — діелектрична проникність середовища.

Використовуватимемо також таке співвідношення між напруженістю магнітного поля і магнітною індукцією:

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (8.5)$$

де  $\chi$  — магнітна сприйнятливість,  $\mu = 1 + 4\pi\chi$  — магнітна проникність середовища. Ця рівність з доброю точністю описує дію парамагнетика в широкому діапазоні величин магнітного поля.

Загалом залежності  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  та  $\mathbf{M}(\mathbf{H})$  чи, що те саме,  $\mathbf{D}(\mathbf{E})$  та  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ , називають *матеріальними рівняннями*. Для задач, пов'язаних із поширенням струму в провідниках, додатково використовують залежність густини струму від напруженості електричного поля  $\mathbf{j}(\mathbf{E})$ , яку часто можна записати у простому вигляді:

$$\mathbf{j}_0 = \sigma \mathbf{E}, \quad (8.6)$$

де  $\sigma$  — питома (електро)провідність. Це рівняння — *закон Ома в диференціальній формі*.

На межі двох середовищ із різними значеннями діелектричної та магнітної сприйнятливостей вектори, що характеризують електромагнітне поле, можуть змінюватися стрибкоподібно. У відповідних розрахунках слід враховувати такі *граничні умови*:

$$\begin{aligned} D_{2n} - D_{1n} &= 4\pi\sigma_0, & B_{2n} - B_{1n} &= 0, \\ P_{2n} - P_{1n} &= -\sigma', & & \\ E_{n2} - E_{n1} &= 4\pi(\sigma_0 + \sigma'). \end{aligned} \quad (8.7)$$

де  $\sigma_0, \sigma'$  позначають відповідно поверхневі густини вільних та індукованих зарядів на границі розділу. Індекс  $n$  означає проекції на одиничний вектор нормалі до поверхні розділу середовищ, спрямований із середовища 1 у середовище 2 (див. рис. 8.1).

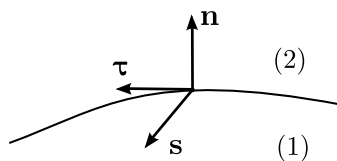


Рис. 8.1.

Тангенціальні компоненти (проекції на одиничний вектор  $\boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{n}$ , дотичний до межі розділу, див. рис. 8.1) задовольняють такі умови:

$$\begin{aligned} H_{2\tau} - H_{1\tau} &= \frac{4\pi}{c} \lambda_{0s}, & E_{2\tau} - E_{1\tau} &= 0, \\ M_{2\tau} - M_{1\tau} &= \frac{1}{c} \lambda'_s, \\ B_{2\tau} - B_{1\tau} &= \frac{4\pi}{c} (\lambda_{0s} + \lambda'_s), \end{aligned} \quad (8.8)$$

де  $\lambda_0, \lambda'$  позначають відповідно лінійні густини вільних та індукованих струмів на поверхні розділу. Індекс  $s$  означає проекцію на вектор  $\mathbf{s} = [\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}]$  (див. рис. 8.1). Ці рівності також можна переписати у векторному вигляді:

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}, \mathbf{H}_2] - [\mathbf{n}, \mathbf{H}_1] &= \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{\lambda}_0, & [\mathbf{n}, \mathbf{E}_2] - [\mathbf{n}, \mathbf{E}_1] &= 0, \\ [\mathbf{n}, \mathbf{M}_2] - [\mathbf{n}, \mathbf{M}_1] &= \frac{1}{c} \boldsymbol{\lambda}'. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Теорему Гаусса для середовища записують так:

$$\oint_S (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = 4\pi \int_V \rho_0 dV = 4\pi q_0, \quad (8.10)$$

де  $\rho_0, q_0$  відповідають вільним зарядам.

Теорема Стокса у стаціонарному випадку для середовища має вигляд:

$$\oint_L (\mathbf{H}, d\boldsymbol{\ell}) = \frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{j}_0, d\mathbf{S}) = \frac{4\pi}{c} I_0, \quad (8.11)$$

де  $\mathbf{j}_0, I_0$  відповідають вільним струмам.

Енергія електромагнітного поля в середовищі визначається так:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V [(\mathbf{E}, \mathbf{D}) + (\mathbf{B}, \mathbf{H})] dV. \quad (8.12)$$

Ємність конденсатора:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}, \quad (8.13)$$

де  $\varphi_1, \varphi_2$  — потенціали першої та другої обкладок відповідно, а  $q$  — заряд першої обкладки (на другій обкладці заряд  $-q$ ).

Якщо зовнішнє поле створюється лінійним струмом  $I_2$ , що протікає по замкнутому контуру 2, то магнітний потік від нього через деякий замкнутий контур 1 записують у вигляді:

$$\Phi_{12} = \frac{1}{c} L_{12} I_2,$$

де

$$L_{12} = \mu \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{(d\ell_1, d\ell_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

— коефіцієнт взаємоіндукції (індуктивність) двох лінійних контурів. Тут  $d\ell_1, d\ell_2$  — елементи цих контурів.

- 
144. Куля радіуса  $a$  з однорідного діелектрика з діелектричною проникністю  $\varepsilon$  внесена в однорідне електричне поле  $\mathbf{E}_0$ . Знайдіть поле після внесення кулі.
145. Провідна незаряджена куля радіуса  $a$  внесена в однорідне електричне поле  $\mathbf{E}_0$ . Знайдіть поле після внесення кулі.
146. Безмежна прямолінійна нитка рівномірно заряджена з лінійною густиною  $\kappa$  й оточена однорідним діелектриком з проникністю  $\varepsilon_1$ , який має форму циліндра з радіусом  $R$ . Простір зовні циліндра заповнений безмежним однорідним діелектриком із проникністю  $\varepsilon_2$ . Знайдіть напруженість поля  $\mathbf{E}$ , яке створює нитка, а також вектор поляризації  $\mathbf{P}$ .

147. Поверхня безмежно довгого круглого циліндра з радіусом  $R$  рівномірно заряджена з поверхневою густиною  $\sigma$ . Циліндр перебуває в неоднорідному діелектричному середовищі з проникністю  $\varepsilon = \varepsilon(r)$ , де  $r$  — відстань до осі циліндра. Знайдіть електричне поле  $\mathbf{E}$  і вектор поляризації  $\mathbf{P}$ .
148. Однорідна діелектрична куля радіуса  $a$  рівномірно заряджена по об'єму. Повний заряд кулі  $q$ , її діелектрична проникність  $\varepsilon_1$ , діелектрична проникність середовища  $\varepsilon_2$ . Обчисліть вектори  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ , густини розподілу зв'язаних зарядів на поверхні ( $\sigma'$ ) і всередині ( $\rho'$ ) кулі.
149. Безмежну рівномірно заряджену площину з обидвох сторін оточує однорідний діелектрик з проникністю  $\varepsilon$ . Поверхнева густина вільних зарядів  $\sigma_0$ . Знайдіть напруженість поля  $\mathbf{E}$ , яке створює площина.
150. Точковий заряд  $q$  розміщений на плоскій границі розділу двох однорідних безмежних діелектриків з проникностями  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ . Знайдіть потенціал електричного поля  $\varphi$  та вектори  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ .
151. Плоский конденсатор заповнений діелектриком, проникність якого змінюється як  $\varepsilon = \varepsilon_1(1+x/a)$ , де  $a$  — відстань між обкладками з площами  $S$ , а вісь  $x$  перпендикулярна до них. Нехтуючи крайовими ефектами, знайдіть ємність конденсатора та розподіл індукованих зарядів.
152. Провідна куля радіусом  $a$  оточена концентричним шаром діелектрика. Зовнішній радіус шару  $b$ , діелектрична проникність діелектрика  $\varepsilon$ . Розрахуйте ємність кулі  $C$ .
153. Центр провідної кулі радіуса  $R$ , яка містить заряд  $q$ , розміщений на плоскій границі розділу двох однорідних безмежних діелектриків з проникностями  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ . Знайдіть потенціал електричного поля  $\varphi$ , а також розподіл зарядів ( $\sigma_0$  та  $\sigma'$ ) на поверхні кулі.

154. Провідна заряджена сфера радіуса  $a$  оточена безмежним діелектриком, проникність якого  $\varepsilon = \varepsilon(r)$ , де  $r$  — віддаль від центра кулі. Заряд кулі  $q$ . Знайдіть напруженість поля, створеного кулею, а також поверхневу густину зв'язаних зарядів на межі кулі та діелектрика.
155. Всередині сферичного конденсатора з радіусами обкладок  $a$  і  $b$  діелектрична проникність змінюється за законом

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon_1 = \text{const} & \text{при } a \leq r < c, \\ \varepsilon_2 = \text{const} & \text{при } c \leq r \leq b, \end{cases}$$

де  $a < c < b$ .

Знайдіть ємність конденсатора, розподіл зв'язаних (індукованих) зарядів.

156. Знайдіть ємність сферичного конденсатора, заповненого наполовину однорідним діелектриком з проникністю  $\varepsilon_1$ , а наполовину — однорідним діелектриком з проникністю  $\varepsilon_2$ . Границя розділу між ними — площина, що проходить через центр обкладок. Радіуси обкладок  $a$  та  $b$ .
157. Знайдіть ємність циліндричного конденсатора. Його довжина  $l$ , радіуси обкладок  $a$  та  $b$ . Простір між обкладками конденсатора заповнений двома коаксіальними шарами однорідних діелектриків з проникностями  $\varepsilon_1$  та  $\varepsilon_2$ . Границя між діелектриками — циліндрична поверхня радіуса  $c$ . Крайовими ефектами знехтуйте.
158. Точковий заряд  $q$  знаходиться в центрі двох концентричних сфер з радіусами  $r_1$  і  $r_2$ . Проміжок між сферами заповнений діелектриком з проникністю  $\varepsilon$ . Обчисліть напруженість електричного поля  $\mathbf{E}$  та вектор поляризації  $\mathbf{P}$  у проміжку між сферами, а також величини зв'язаних зарядів  $q'_1, q'_2$  на поверхнях сфер.

159. Знайдіть ємність плоского конденсатора. Площа поверхні обкладок  $S$ , а між ними — два плоскопаралельних шари однорідних діелектриків. Товщина першого шару —  $d_1$ , діелектрична проникність  $\varepsilon_1$ , другого — відповідно  $d_2$  і  $\varepsilon_2$ . Крайовими ефектами знехтуйте.
160. Сферичний конденсатор з радіусами внутрішньої обкладки  $a$  і зовнішньої  $b$  заповнений діелектриком, проникність якого змінюється як  $\varepsilon = \varepsilon_1(1 + \gamma r)$ , де  $r$  — відстань від центру конденсатора. Знайдіть ємність такого сферичного конденсатора.
161. Циліндричний конденсатор висотою  $l$  з радіусами внутрішньої обкладки  $a$  і зовнішньої  $b$ , заповнений діелектриком, проникність якого змінюється як  $\varepsilon = \varepsilon_1(1 + \gamma r)$ , де  $r$  — відстань від центру конденсатора. Знайдіть ємність такого циліндричного конденсатора. Крайовими ефектами знехтуйте.
162. По безмежній прямолинійній нитці тече струм  $I$ . Вона оточена однорідним магнетиком з проникністю  $\mu_1$ , який має форму циліндра з радіусом  $R$ . Простір зовні циліндра заповнений безмежним однорідним магнетиком із проникністю  $\mu_2$ . Знайдіть індукцію поля  $\mathbf{B}$ , яке створює нитка, а також вектор намагніченості  $\mathbf{M}$ .
163. По поверхні безмежно довгого круглого циліндра з радіусом  $R$ , вздовж його твірних протікає рівномірно розподілений поверхневий струм густини  $j$ . Циліндр перебуває в неоднорідному магнітному середовищі з проникністю  $\mu = \mu(r)$ , де  $r$  — відстань до осі циліндра. Знайдіть магнітне поле  $\mathbf{B}$  і вектор намагніченості  $\mathbf{M}$ .
164. Куля радіуса  $a$  з однорідного магнетика з проникністю  $\mu$  внесена в однорідне магнітне поле  $\mathbf{B}_0$ . Знайдіть поле після внесення кулі.

165. По безмежній площині в одному напрямі тече рівномірний поверхневий струм з густиною  $j$ . З обидвох сторін площина оточена однорідним магнетиком з проникністю  $\mu$ . Знайдіть магнітне поле  $\mathbf{B}$ , яке створює площина.
166. Прямолінійний провідник, по якому тече струм  $I$ , розміщений на плоскій границі розділу двох однорідних безмежних магнетиків з проникностями  $\mu_1, \mu_2$ . Знайдіть потенціал магнітного поля  $\mathbf{A}$  та вектори  $\mathbf{H}, \mathbf{B}$ .
167. Знайдіть намагніченість діелектрика з поляризацією  $\mathbf{P}$ , який рухається зі швидкістю  $v \rightarrow c$ .
168. Простір між обкладками сферичного конденсатора, зовнішнім радіусом  $r_1$  та внутрішнім  $r_2$ , заповнено середовищем з питомою провідністю  $\sigma$ . Між обкладками конденсатора підтримують сталу різницю потенціалів  $U$ . Знайдіть опір між обкладками конденсатора та силу струму.
169. Простір між обкладками циліндричного конденсатора, зовнішнім радіусом  $r_1$  та внутрішнім  $r_2$ , заповнено середовищем з питомою провідністю  $\sigma$ . Між обкладками конденсатора підтримують сталу різницю потенціалів  $U$ . Знайдіть опір між обкладками конденсатора та силу струму на одиницю довжини конденсатора.
170. Між обкладками циліндричного конденсатора, зовнішнім радіусом  $r_1$  та внутрішнім  $r_2$ , підтримують сталу різницю потенціалів  $U$ . Простір між обкладками в області  $r_1 < r < r_0$  заповнено середовищем з питомою провідністю  $\sigma_1$ , а в області  $r_0 < r < r_2$  —  $\sigma_2$ . Знайдіть опір між обкладками конденсатора та силу струму на одиницю довжини конденсатора.
171. Між обкладками сферичного конденсатора, зовнішнім радіусом  $r_1$  та внутрішнім  $r_2$ , підтримують сталу різницю потенціалів  $U$ . Простір між обкладками в області  $r_1 < r < r_0$  заповнено



середовищем з питомою провідністю  $\sigma_1$ , а в області  $r_0 < r < r_2 - \sigma_2$ . Знайдіть опір між обкладками конденсатора та силу струму.

172. Знайдіть коефіцієнти взаємоіндукції двох однакових контурів у вигляді квадрата зі стороною  $a$ . Сторони контурів розміщені паралельно один відносно одного на відстані  $b$ .
173. Знайдіть коефіцієнт взаємоіндукції двох концентричних кіл радіусами відповідно  $a$  та  $b$ , які розміщені у паралельних площинах на відстані  $h$ .
174. Знайдіть коефіцієнт взаємоіндукції між контуром провідника у вигляді квадрата зі стороною  $a$ , по якому протікає струм силою  $I_2$ , та безмежно довгим провідником із струмом  $I_1$ , які розміщені в одній площині. Сторона квадрата паралельна до безмежно довгого провідника і знаходиться на відстані  $b$ .
175. Знайдіть коефіцієнт взаємоіндукції між контуром провідника у вигляді правильного трикутника зі стороною  $a$ , по якому протікає струм силою  $I_2$ , та безмежно довгим провідником із струмом  $I_1$ , які розміщені в одній площині. Сторона трикутника паралельна до безмежно довгого провідника і знаходиться на відстані  $b$ .
176. Знайдіть коефіцієнт взаємоіндукції між тором і безмежно довгим провідником, розташованим вздовж його осі. На тор круглого перерізу радіуса  $a$  намотано  $N$  витків дроту. Відстань від центра перерізу тора до його осі рівна  $b$ .
177. Знайдіть коефіцієнт самоіндукції одиниці довжини безмежно довгої котушки радіусом  $a$ . Кількість витків дроту котушки на одиницю довжини —  $n$ . Магнітна проникність котушки  $\mu$ .
178. На тор круглого перерізу радіуса  $a$  рівномірно намотано  $N$  витків дроту. Центр перерізу тора знаходиться на відстані  $b$  від її осі. Магнітна проникність сердечника  $\mu$ . Знайдіть самоіндукцію тора.

## 9. Квазістаціонарні явища

Квазістаціонарне наближення відповідає тому, що густину струму зміщення  $\partial\mathbf{D}/\partial t$  вважають нехтівно малою порівняно з густиною струму провідності  $\mathbf{j}$ . Рівняння Максвелла у цьому наближенні мають вигляд:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_0, \quad (9.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (9.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (9.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0. \quad (9.4)$$

За умов високої провідності  $\sigma$  густиною вільних зарядів у провіднику можна знехтувати,  $\rho_0 \simeq 0$ . Враховуючи зв'язки  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  та  $\mathbf{j}_0 = \sigma\mathbf{E}$ , отримаємо після нескладних перетворень:

$$\Delta\mathbf{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \quad \Delta\mathbf{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}. \quad (9.5)$$

*Магнітна гідродинаміка* описує процеси в рухомих провідних рідинах і газах. Якщо ділянка середовища рухається зі швидкістю  $\mathbf{v}$ , то для густини струму матимемо:

$$\mathbf{j}_0 = \rho_0\mathbf{v} + \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right). \quad (9.6)$$

У таких середовищах  $\mu \simeq 1$ , тобто  $\mathbf{B} \simeq \mathbf{H}$ , отже й

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (9.7)$$

Завдяки високій провідності знову  $\rho_0 \simeq 0$ , тому напруженість магнітного поля  $\mathbf{H}$  в рідкому провіднику визначає рівняння

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H} + \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}], \quad (9.8)$$

причому швидкість  $\mathbf{v}$  знаходять на підставі гідродинамічних співвідношень. У найпростішому підході застосовують *рівняння Ейлера*:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\tau} \nabla p + \frac{1}{\tau} \left( \rho_0 \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{j}_0, \mathbf{H}] \right), \quad (9.9)$$

де  $\tau$  — густина речовини, а  $p$  — тиск. Це рівняння відповідає наближенню нев'язкої рідини. Цю систему також доповнюють *законом збереження маси (рівнянням неперервності)*:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \text{div}(\tau \mathbf{v}) = 0 \quad (9.10)$$

або

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \tau + \tau \text{div} \mathbf{v} = \frac{d\tau}{dt} + \tau \text{div} \mathbf{v} = 0. \quad (9.11)$$

179. Закон Фарадея про електромагнітну індукцію у випадку нерухомого контура  $L$  формулюють так:

$$\oint_L (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = -\frac{1}{c} \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, d\mathbf{S} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

де  $\Phi$  — магнітний потік через контур  $L$ . Покажіть, що врахування руху контура дає змогу записати загальніший вираз,

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt},$$

та з'ясуйте зміст електрорушійної сили  $\mathcal{E}$ .

180. Покажіть, що в границі  $l_0 \rightarrow 0$  закон Ройтера–Зондгаймера (Reuter & Sondheimer, 1948)

$$\mathbf{j}_0(\mathbf{r}) = \frac{3\sigma}{4\pi l_0} \int \frac{\mathbf{R}(\mathbf{R}, \mathbf{E}(\mathbf{r}'))}{R^4} e^{-R/l_0} dV', \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}',$$

який є нелокальним узагальненням закону Ома, переходить у звичайний закон Ома.

181. Визначте розподіл густини струму за перерізом провідника циліндричної форми, в якому протікає змінний струм з частотою  $\omega$ . Проаналізуйте границю великих частот. Магнітна проникність матеріалу провідника  $\mu$ .
182. Система складається з двох коаксіальних провідників у формі циліндра провідністю  $\sigma_1$  і магнітною проникністю  $\mu_1$  при  $r < a$  та  $\sigma_2$  і  $\mu_2$  при  $a < r < b$  відповідно, електрично з'єднаних по  $r = a$ . Повний струм через переріз провідників дорівнює  $\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}_0 e^{i\omega t}$ . Розрахуйте розподіл струму та магнітне поле.
183. Покажіть на підставі рівнянь магнітогідродинаміки, що обертальний рух середовища не спричиняє генерації магнітного поля.
184. У стисливій нев'язкій ідеально провідній рідині густиною  $\tau_0$  в однорідному магнітному полі  $\mathbf{H}_0$  поширюються магнітогідродинамічні хвилі вздовж напрямку  $\mathbf{k}$ . Нехай кут між векторами  $\mathbf{H}_0$  і  $\mathbf{k}$  дорівнює  $\theta$ , причому  $\theta \neq 0, \pi/2$ . Покажіть, що існують три різні хвилі із фазовими швидкостями

$$\begin{aligned} u_1^2 &= (v_A \cos \theta)^2, \\ u_{2,3}^2 &= \frac{1}{2}(s^2 + v_A^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(s^2 + v_A^2)^2 - 4s^2 v_A^2 \cos^2 \theta}, \end{aligned}$$

де  $s$  — швидкість звуку в рідині, а  $v_A = H_0/\sqrt{4\pi\tau_0}$  — альфвенівська швидкість.

185. Нестислива нев'язка ідеально провідна рідина зі сталою густиною  $\tau_0$  перебуває в однорідному статичному магнітному полі  $\mathbf{H}_0$  і в гравітаційному полі з потенціалом  $\psi$ . Покажіть, що існують магнітогідродинамічні хвилі довільної амплітуди і форми  $\mathbf{H}_1(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ , які задовольняють рівняння

$$(\mathbf{H}_0, \nabla)\mathbf{H}_1 = \pm\sqrt{4\pi\tau_0} \frac{\partial\mathbf{H}_1}{\partial t},$$

$$\mathbf{H}_1 = \pm\sqrt{4\pi\tau_0} \mathbf{v},$$

$$p + \tau_0\psi + \frac{1}{8\pi}(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1)^2 = \text{const.}$$