

Перелік задач на іспит з теоретичної механіки для спеціальности “фізика”

1. Знайдіть закон руху частинки в потенціальному полі

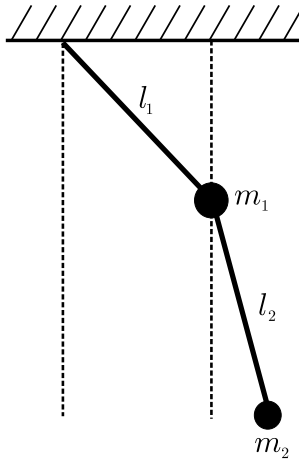
$$U(x) = U_0(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}).$$

2. Знайдіть закон руху частинки в потенціальному полі

$$U(x) = U_0 \tan^2(\alpha x).$$

3. Обчисліть дужки Пуассона $\{e^{x+y}, p_x p_y\}$, $\{\cos xy, p_x p_y\}$.

4. Отримайте рівняння Лагранжа для подвійного математичного маятника (плоского). Знайдіть частоти малих коливань.



5. Знайдіть лагранжіан і гамільтоніан системи, зображеної на рисунку 1(а). Вантажі підвішено на невагомих жорстких стрижнях. k — жорсткість пружини, a — довжина нерозтягнутої пружини.

6. Знайдіть лагранжіан і гамільтоніан системи, зображеної на рисунку 1(б). Вантаж підвішено на невагомому жорсткому стрижні.

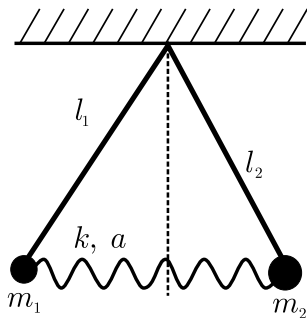


Рис. 1: (а)

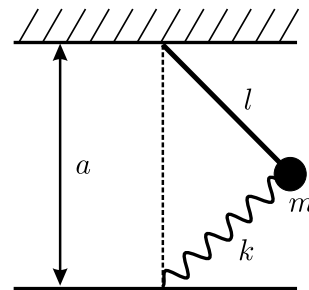
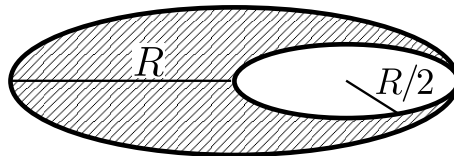


Рис. 1: (б)

7. Знайдіть гамільтоніан системи, якщо відомий лагранжіан. $L = \dot{x}^2 - \dot{x}x \sin t - \cos t$. Запишіть канонічні рівняння.

8. Частинка перебуває в потенціальному полі $U = U_0 e^{-\alpha x + \beta x^2}$; $U_0, \beta > 0$. Знайдіть положення рівноваги та частоту малих коливань.
9. Частинка перебуває в потенціальному полі $U = -\frac{U_0}{\cosh^2 ax}$; $U_0 > 0$. Знайдіть положення рівноваги та частоту малих коливань.
10. Знайдіть швидкість $v(t)$ падіння частинки в однорідному полі з тертям, пропорційним $v^2(t)$. Визначте встановлену швидкість руху.
11. Проінтегруйте рівняння руху $\ddot{x} = k \sin \frac{x}{a}$, $k > 0, a > 0$. Початкові умови: $x(t = 0) = \pi a$, $\dot{x}(t = 0) = 2\sqrt{ka}$.
12. Знайдіть енергію E , набуту осцилятором без загасання під дією сили $F(t) = \frac{F_0}{1 + (t/\tau)^2}$ за весь час її дії. При $t = -\infty$ осцилятор був у спокої.
13. Методом Боголюбова–Крилова знайдіть першу поправку до частоти для лагранжіану $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} - \frac{\alpha}{4} x^4$.
14. Методом Гамільтона–Якобі знайдіть розв'язки рівнянь руху для потенціалу $U = \beta x^2$.
15. Обчисліть момент інерції квадратної пластини відносно діагоналі. Її маса — m , довжина сторони a .
16. Обчисліть головні моменти інерції диска радіуса R з вирізаним отвором радіуса $R/2$ (див. рис.). Маса диска m .



17. Дано твірну функцію канонічного перетворення: $F(q, Q) = \frac{1}{2} m \omega q^2 \operatorname{ctg} Q$. Знайдіть твірну функцію $F_2(q, P)$.
18. Для гармонічного осцилятора з частотою ω задано твірну функцію канонічного перетворення $F(q, Q) = \frac{1}{2} m \omega q^2 \operatorname{ctg} Q$. Знайдіть гамільтоніан у змінних Q, P і розв'яжіть рівняння руху.
19. Матеріальна точка рухається в полі тяжіння по гладкій похилій площині (кут нахилу α). Використовуючи рівняння Лагранжа 1-го роду, знайдіть закон руху точки та реакцію площини.
20. Знайдіть частоти коливань системи з лагранжіаном $L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \frac{\omega_0 x^2 + \omega_0 y^2}{2} + \alpha xy$.
21. Знайдіть момент інерції кругового конуса відносно осі обертання. Маса конуса m , радіус основи R , висота h .
22. Знайдіть тензор інерції $I_{\alpha\beta}$ кулі масою m , радіусом R .