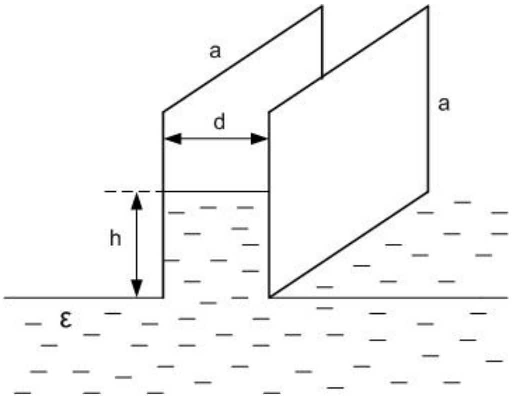
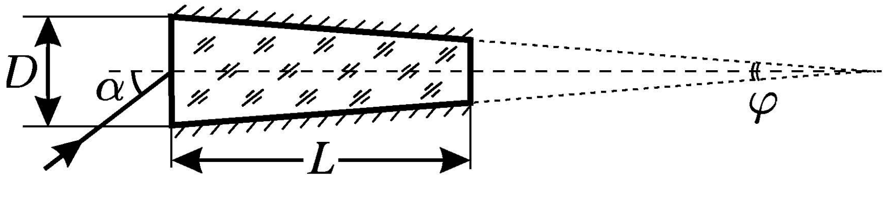
Обласна олімпіада з фізики
11 клас
Львів 2009

1. У двох балонах, що мають об'єми V_1 та V_2, містяться два гази при однаковій температурі і тисках P_1 та P_2 відповідно. Балони сполучено трубкою. Який тиск P встановиться у балонах, якщо відкрити кран? Вважати, що температура при такому процесі не змінюється і гази в хімічну реакцію не вступають. (3 бали)

2. Плоский повітряний конденсатор складається з двох квадратних металевих пластинок розміром $a \times a$, розміщених на відстані d одна від одної, причому $d \ll a$. Пластинки конденсатора розміщені вертикально, а нижні краї їх — горизонтально. Конденсатор заряджають та від'єднують від джерела напруги. Потім конденсатор підносять до посудини з непровідною речовиною так, щоб поверхня рідини торкалась нижніх країв пластин. Рідина втягується у конденсатор і встановлюється на деякій висоті. Знайти висоту підйому рідини h, якщо напруга на конденсаторі наприкінці процесу рівна U. Густина рідини ρ, діелектрична проникність рівна ε. Поверхневим натягом рідини і крайовими ефектами на пластинках конденсатора можна знехтувати. (5 балів)



3. Скляна пластинка в поперечному перерізі має форму рівнобічної трапеції. Основа трапеції рівна D, висота L, а кут між бічними сторонами трапеції рівний $\varphi \ll 1°$. Показник заломлення скла рівний n, а бокові поверхні є дзеркальними. При яких кутах падіння α промінь світла, який падає на більшу основу трапеції, буде виходити через меншу основу трапеції? (5 балів)



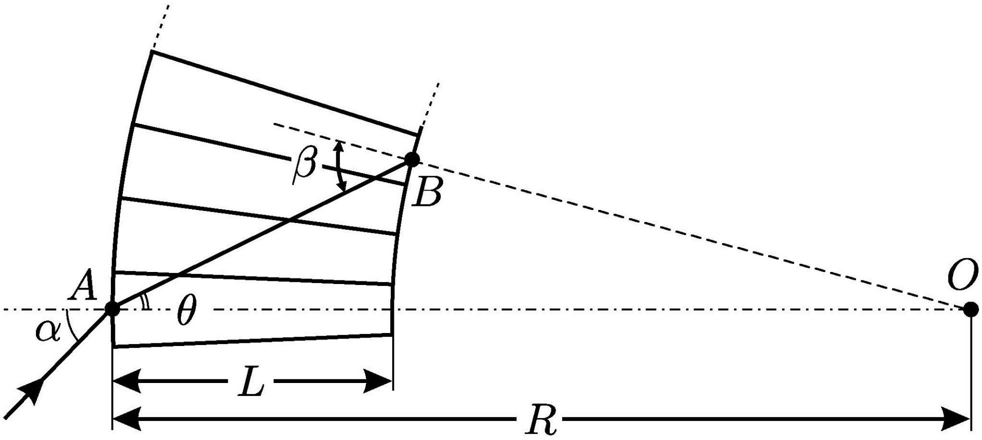
4. На горизонтальній площині лежить півсфера радіусом R (випуклою стороною вверх). З точки, яка знаходиться над центром півсфери (точка, з якої кидають кульку, не лежить на півсфері), кидають в горизонтальному напрямку маленьку кульку, яка падає на площину, не відбиваючись від півсфери. Знайти мінімально можливу швидкість кульки в момент падіння на площину. Опором повітря знехтувати. (7 балів)

Розв'язки задач для 11 класу

1. Згідно з рівнянням Менделеєва–Клапейрона $P_1V_1 = \nu_1 RT$, $P_2V_2 = \nu_2 RT$, $P(V_1+V_2) = \nu RT$. Величини ν_1 і ν_2 — це кількість речовини відповідно в першому і другому балонах, ν— загальна кількість речовини. Оскільки $\nu = \nu_1 + \nu_2$, отримаємо
$$P = \frac{P_1V_1 + P_2V_2}{V_1+V_2}. \tag{1}$$

2. Рідина у кондсенсаторі підніметься на таку висоту h, щоб повна енергія W замкненої системи у стані стійкої рівноваги була мінімальною. Ця енергія складається з потенціальної енергії рідини висотою h: $mgh/2 = \rho g d a h^2/2$ ($h/2$—висота ценра ваги рідини) й енергії електричного поля конденсатора $q^2/2C$ (q=const). Ємність такої системи можна розрахувати, зобразивши її у вигляді двох паралельно з'єднаних коденсаторів. Між пластинами одного з конденсаторів знаходится діелектрик, тоді $C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon a h/d$, а іншого — повітря, то $C_2 = \varepsilon_0 \left(a^2 - ah\right)/d$. Сумарна ємність двох паралельно з'єднаних конденсаторів:
$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d}\left(1 + (\varepsilon - 1)\frac{h}{a}\right).$$
Отже
$$W = \frac{\rho g a d h^2}{2} + \frac{q^2}{2C}.$$
Далі знайдемо значення величини h, при якій енергія системи буде мінімальною. Прирівнюючи до нуля похідну $W' = 0$, отримаємо
$$\rho g a d h - \frac{q^2}{2C^2}\frac{\varepsilon_0 a(\varepsilon - 1)}{d} = 0.$$
Візьмемо до уваги, що $q = CU$ і остаточно запишемо:
$$h = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)U^2}{2\rho g d^2}.$$

3. Промінь світла, який падає на більшу основу трапеції, декілька раз відбивається від дзеркальних бічних поверхонь, після чого потрапляє на малу основу трапеції. Він пройде через малу основу трапеції, якщо кут падіння його не перевищує кут повного граничного відбивання: $\sin\beta_{\max} = 1/n$. Для простішого розв'язку цієї задачі використаймо метод відображень. Симетрично відносно бічної грані, на якій відбувається дзеркальне відбивання променя, будемо послідовно відображати пластинку. Після таких послідовних відображень отримаємо, що промінь проходить бічну поверхню трапеції наскрізь. Це відображення ходу променя у пластинці виглядає так, ніби ми відбиваємо пластинку разом із променем відносно бічної поверхні (див. рис.).



Застосуємо до трикутника ABO теорему синусів:

$$\frac{\sin\theta}{R-L} = \frac{\sin(\pi-\beta)}{R}.$$

Враховуючи, що $R = D/2\,\mathrm{tg}(\varphi/2)$ отримаємо:

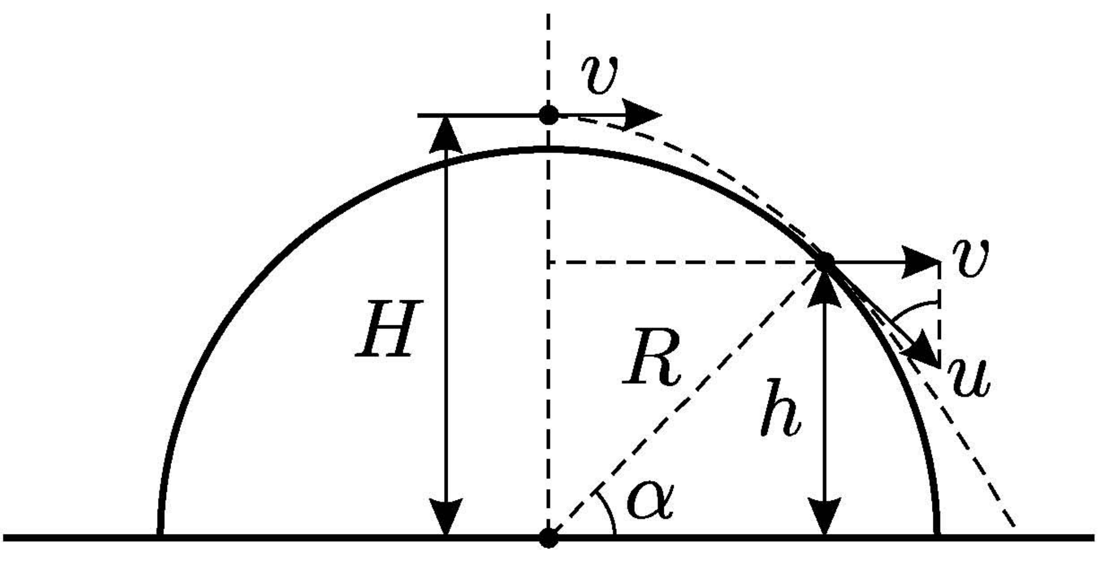
$$\sin\theta_{\max} = \left(1 - \frac{L}{R}\right)\sin\beta_{\max} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2L}{D}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right).$$

Кут $\alpha_{\max}$ визначаємо із закону заломлення променя: $\sin\alpha_{\max} = n\sin\theta_{\max}$. Враховуючи малість кута φ: $\mathrm{tg}\,\varphi/2 \approx \varphi/2$, остаточно отримаємо:

$$\sin\alpha_{\max} \approx 1 - \frac{L\varphi}{D}, \qquad \alpha_{\max} \approx \arcsin\left(1 - \frac{L\varphi}{D}\right). \tag{2}$$

Промінь світла пройде через пластинку при кутах падіння: $\alpha < \alpha_{\max}$.

4. Мінімальна швидкість кульки в момент падіння на площину досягається при киданні її з мінімальною повною енергією. Потрібно правильно вибрати висоту кидання кульки і її швидкість. Зрозуміло, що оптимальна траєкорія польоту кульки майже повинна дотикатись до півсфери в деякій точці. Позначимо початкову швидкість тіла через v, швидкість кульки в точці дотику до півсфери — u, висоту з якої кидають кульку — H. Нехай траєкторія польоту куль-



ки майже дотикається до півсфери на висоті $h = R\sin\alpha$, де α — це кут між горизонтом і радіусом півсфери, проведеним в точку дотику. Вектор шидкості кульки $\vec{u}$ напрямлений по дотичній до півсфери і в точці дотику утворює кут α з вертикалю. Горизонтальна складова швидкості u з часом не змінюється і виражається через кут α так: $v = u\sin\alpha$. Час польоту кульки до точки дотику $t = R\cos\alpha/v$. Вертикальна складова швидкості змінюється за законом: $u\cos\alpha = gt = gR\cos\alpha/v$. З цих рівнянь для швидкості v отримаємо: $v^2 = gR\sin\alpha$. По вертикалі кулька вільної падає і до точки дотику проходить відстань

$$H - h = \frac{gt^2}{2} = \frac{gR^2\cos^2\alpha}{2v^2} = \frac{R\cos^2\alpha}{2\sin\alpha}.$$

Звідси, висота з якої кидають кульку, рівна

$$H = \frac{R(\sin^2\alpha + 1)}{2\sin\alpha}.$$

Запишемо вираз для повної енергії кульки в точці кидання:

$$E = mgH + \frac{mv^2}{2} = mgR\left(2\sin\alpha + \frac{1}{\sin\alpha}\right).$$

Мінімальне значення повної енергії в момент кидання забезпечується мінімальним значенням кута α:

$$E' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\cos\alpha - \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, мінімальне значення повної енергії кульки при кидані буде досягатись, коли $\alpha = 45°$ в точці дотику до півсфери. Відповідне значення повної енергії: $E_{\min} = \sqrt{2}mgR$. В момент падіння кульки на площину потенціальна енергія її рівна нулеві. Мінімальна швидкість кульки визначається із закону збереження повної енергії:

$$E_{\min} = \sqrt{2}mgR = \frac{mv_{min}^2}{2}, \qquad v_{\min} = \sqrt{2\sqrt{2}gR}. \tag{3}$$