ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

На правах рукопису

Возняк Олекса Орестович

УДК 538.94

СУПЕРСИМЕТРІЯ ТА КВАЗІТОЧНО РОЗВ'ЯЗУВАНІ ПОТЕНЦІАЛИ ДЛЯ ЧАСТИНКИ З МАСОЮ, ЗАЛЕЖНОЮ ВІД КООРДИНАТ

01.04.02 — Теоретична фізика

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук,
професор
Ткачук Володимир Михайлович

ЛЬВІВ — 2016

Зміст

ВСТУП

Актуальність теми. Відшукання точних розв'язків фізичних задач, зокрема, задач квантової механіки, є актуальним напрямом сучасних досліджень, оскільки саме точні розв'язки дають змогу проаналізувати частинні випадки задачі, асимптотичну поведінки, стійкість та характер зміни отриманих розв'язків у разі зміни параметрів задачі. Вони часто слугують базисом для побудови теорії збурень. Важливими є також випадки, коли досліджувана складна система за певних припущень та наближень стає еквівалентною простішій системі з відомими точними розв'язками.

Однак лише для незначної кількості фізичних задач можна знайти їхні точні розв'язки, тобто виразити в аналітичній формі за допомогою наявних математичних методів через елементарні чи спеціальні функції. Зазвичай точні розв'язки вдається віднайти лише для найпростіших ідеалізованих систем.

Тому виділяють декілька класів задач, для яких можна знайти розв'язки в аналітичній формі. До класу точно розв'язуваних належать задачі, для яких у явному вигляді можна знайти всі власні стани і відповідні власні значення. Інший клас становлять так звані умовно-точно розв'язувані задачі, для яких рівняння на власні значення можна розв'язати у випадку, коли на потенціал накладено певні додаткові умови. Для квазіточно розв'язуваних (КТР) задач можна знайти явно тільки декілька енергетичних рівнів та відповідних хвильових функцій.

Останніми роками для відшукання точних розв'язків рівняння Шредінґера широко використовують суперсиметричний метод. Зокрема, запропоновано новий метод конструювання КТР потенціалів, який використовує математичний апарат суперсиметричної квантової механіки та дає змогу знаходити нові КТР потенціали з одним, двома та трьома відомими розв'язками. Розширення суперсиметричного методу конструювання КТР потенціалів на випадок періодичних та випадкових потенціалів є важливим кроком у його вдосконаленні, оскільки саме періодичні та випадкові потенціали найчастіше використовують у квантовомеханічних задачах фізики твердого тіла.

Іншим актуальним науковим напрямом сучасних досліджень є задачі квантової механіки, пов'язані з описом руху частинки в полі дії деякого потенціалу для випадку, коли маса частинки є функцією від координат. Квантові системи з координатно залежною ефективною масою активно вивчають протягом останніх років через можливість застосування отриманих результатів під час пояснення явищ в неоднорідно легованих напівпровідниках, напівпровідникових гетероструктурах, квантових ямах та надґратках. Застосування суперсиметричного методу конструювання КТР потенціалів для частинки з масою, яка залежить від координат, дасть змогу значно збільшити перелік систем із координатно залежною масою, для яких відомі декілька точних розв'язків.

Важливою загальнофізичною проблемою, яка виникає у разі дослідження систем з масою, залежною від координат, є вибір впорядкування некомутативних операторів координати та імпульсу в операторі кінетичної енергії під час побудови квантовомеханічного аналога класичного гамільтоніана зі змінною масою. Залежно від виду системи, яку досліджують, науковці використовують різні упорядкування зазначених операторів, що може призводити до отримання неоднакових результатів. Тому розв'язання проблеми упорядкування операторів в кінетичній енергії з урахуванням перших принципів квантової механіки є актуальною задачею сучасних фізичних досліджень.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у Львівському національному університеті імені Івана Франка в рамках держбюджетних тем Фф-38Б «Квантова теорія конденсованих систем із різними типами невпорядкованості» (2000–2001 рр., номер держреєстрації 0100U001446), Фф-150Ф «Розробка нових математичних методів дослідження квантових систем» (2003–2005 рр., номер держреєстрації 0103U001935), Фф-14Ф «Нові методи дослідження квантових систем декількох і багатьох частинок» (2009–2011 рр., номер держреєстрації 0109U002096), Фф-110Ф «Нові ефекти у квантових рідинах і газах та системах з деформованою алгеброю Гайзенберґа» (2012–2014 рр., номер держреєстрації 0112U001275) та Фф-30Ф «Класичні і квантові системи з нестандартними комутаційними співвідношеннями і статистиками» (2016 р., номер держреєстрації 0116U001539).

Мета і задачі дослідження. Метою дисертації є розширення суперсиметричного методу генерування КТР потенціалів для квантової частинки зі сталою масою в полі дії періодичного чи випадкового потенціалу та із залежною від координат масою, а також вивчення проблеми впорядкування залежної від координат маси в операторі кінетичної енергії.

Для досягнення цієї мети сформульовано задачі узагальнення суперсиметричного методу конструювання КТР потенціалів для випадку частинки зі сталою масою в полі дії періодичного та випадкового потенціалу та відшукання нових КТР потенціалів для таких систем; отримання з перших принципів гамільтоніана частинки з масою, залежною від координат, для неоднорідної моделі сильного зв'язку; узагальнення суперсиметричного методу конструювання КТР потенціалів для випадку частинки з масою, залежною від координат, та відшукання нових КТР потенціалів для таких систем; дослідження умов існування локалізованих та нелокалізованих станів для частинки в полі дії отриманих КТР потенціалів.

Об'єктом досліджень є квантова частинка зі сталою масою чи з масою, залежною від координат, що перебуває в полі дії потенціалу.

Предметом дослідження є квантові стани частинки зі сталою масою чи з масою, залежною від координат, що перебуває в полі дії потенціалу.

Методом дослідження є суперсиметричний метод конструювання квазіточно розв'язуваних потенціалів.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертаційній роботі вперше узагальнено суперсиметричний метод конструювання квазіточно розв'язуваних потенціалів для випадку періодичних потенціалів з двома та трьома точними розв'язками, що дало змогу отримати нові періодичні квазіточно розв'язувані потенціали.

Вперше суперсиметричний метод застосовано до конструювання квазіточно розв'язуваних випадкових потенціалів з одним та двома відомими розв'язками.

Вперше отримано квазіточно розв'язувану випадкову модель Кроніга-Пенні й випадкові тригонометричні потенціали з одним та двома відомими розв'язками.

Вперше отримано в довгохвильовій границі гамільтоніан неоднорідної моделі сильного зв'язку, який описує частинку з масою, залежною від координат та, як наслідок, вперше розв'язано в цьому випадку проблему впорядкування імпульсу та маси в операторі кінетичної енергії.

Вперше запропоновано новий, загальніший вигляд оператора кінетичної енергії для частинки з масою, залежною від координат, який параметризується трьома функціями, добуток яких пов'язаний з масою частинки.

Вперше узагальнено суперсиметричний метод конструювання квазіточно розв'язуваних потенціалів для випадку систем із масою, залежною від координат, та вперше отримано квазіточно розв'язувані потенціали з одним та двома рівнями для частинки з координатно залежною масою.

Вперше в рамках суперсиметричного методу показано можливість існування локалізованих станів у постійному потенціалі для частинки з масою, залежною від координат.

Практичне значення одержаних результатів. Отримані в дисертації результати досліджень мають самостійне значення, пов'язане з розширенням кола задач, для яких вдається знайти точні розв'язки.

Отримані результати можна використати для побудови ефективних алгоритмів чисельного розв'язку конкретних фізичних задач, а також залучити для пояснення експериментальних результатів у фізиці періодичних систем, а саме: твердого тіла, надґраток, неоднорідно легованих напівпровідників та різних наногетеросистем, які ґрунтуються на одночастинкових розв'язках рівняння Шредінґера з періодичними та випадковими потенціалами.

Особистий внесок здобувача. Задачу дослідження сформулював науковий керівник професор В. М. Ткачук. Усі викладені у дисертаційній роботі результати одержано автором самостійно або за його безпосередньої участі. У працях, виконаних спільно з науковим керівником, здобувачу належить:

— узагальнення суперсиметричного методу конструювання КТР потенціалів для випадку періодичних потенціалів з двома та трьома відомими розв'язками; дослідження умов, які повинна задовольняти генеруюча функція для того, щоб отримані розв'язки рівняння Шредінґера мали фізичний зміст, та для отримання нових періодичних КТР потенціалів [90];

— узагальнення суперсиметричного методу конструювання КТР потенціалів у разі випадкових потенціалів з одним та двома відомими розв'язками та дослідження умов, які повинна задовольняти генеруюча функція для того, щоб отримані розв'язки рівняння Шредінґера мали фізичний зміст [91];

— знаходження КТР випадкових потенціалів моделі Кроніга-Пенні та випадкових тригонометричних потенціалів з одним та двома точними розв'язками [92];

–– узагальнення суперсиметричного методу конструювання КТР потенціалів з відомими основним та першим збудженим станами для випадку систем з масою, залежною від координат, та отримання нових КТР потенціалів [93]

–– узагальнення суперсиметричного методу конструювання КТР потенціалів з двома відомими довільними станами для випадку систем з масою, залежною від координат, та отримання нових КТР потенціалів [96]

— дослідження умов наявності локалізованих станів у постійному потенціалі для частинки з масою, залежною від координат [93, 96]

— дослідження довгохвильової границі неоднорідної моделі сильного зв'язку та розв'язання в цьому випадку проблеми впорядкування імпульсу та залежної від координат маси в операторі кінетичної енергії, а також отримання нового загального вигляду оператора кінетичної енергії [95]

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, які містяться у дисертаційній роботі, були репрезентовані на:

— Міжнародному семінарі з фізики і хімії твердих тіл (Золотий потік/Ченстохова, 2003р.);

— II Міжнародній науковій конференції "Фізика невпорядкованих систем"(м.Львів, 2003 р.);

— IV Міжнародній науковій конференції "Фізика невпорядкованих систем"(м.Львів, 2008р.);

— XIII Міжнародній конференції з фізики і технології тонких плівок та наносистем (м.Івано-Франківськ, 2011 р.);

— Міжнародному семінарі з поточних проблем у фізиці (м.Львів, 2012 р.)

— V Міжнародній науковій конференції "Фізика невпорядкованих систем"(м.Львів, 2013 р.);

— XIV Міжнародній конференції з фізики і технології тонких плівок та наносистем (м.Івано-Франківськ, 2013 р.);

— Міжнародному семінарі з поточних проблем у фізиці (м.Львів, 2014 р.)

Подані в роботі результати неодноразово обговорювались на наукових семінарах кафедри теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка.

Публікації. Матеріали дисертації опубліковані у семи статтях у фахових виданнях [90–96], одному препринті [97] та восьми тезах доповідей на конференціях [98–105].

Розділ 1

Огляд літератури

Як відомо, симетрія фізичної системи, тобто незмінність її властивостей при певних перетвореннях координат, має адекватний опис у теорії груп. У переважній більшості випадків - це апарат класичних груп Лі. Суперсиметрія, що пов'язує ферміонні та бозонні стани, також формулюється у термінах певної групи перетворень, що діють на стани системи, переводячи ферміонні стани у бозонні, а бозонні - у ферміонні. Усі інші види симетрії фізичних систем перетворюють фермі-стани у фермі-стани, а бозонні стани - у бозонні. Тобто, перетворення, що описують ці симетрії, не змішують характер переставної симетрії станів.

Єдиним видом симетрії, що нетривіально поєднує неперервні перетворення із певними дискретними перетвореннями, які мають різну природу, є суперсиметрія. Попри це, зберігається формальна аналогія між цими двома різними типами перетворень. Саме ця аналогія і є найважливішою властивістю суперсиметрії. У квантовій теорії поля цю аналогію відзначив ще П.Дірак у своїй відомій книзі [1], де зазначено, що вирази для бозонних і ферміонних теорій поля дуже подібні, а єдиною відмінністю між ними є те, що для операторів породження і знищення бозонних і ферміонних полів виконуються різні переставні співвідношення: для бозоних - комутатори, а для ферміонних - антикомутатори.

Адекватним апаратом у випадку суперсиметрії є супергрупи, які є узагальненнями класичних груп Лі [2]. Переважно, замість групи Лі досить розглянути простіший апарат - супералгебру Лі, яка описує нескінченно малі перетворення симетрії. Елементами алгебри є лінійні комбінації базисних елементів, які називають генераторами. Саме генератори, кількість яких у переважній більшості практично важливих випадків є скінченою, утворюють набір основних фізичних величин для системи, що має деяку симетрію. Супералгебра, яка лежить в основі суперсиметричних теорій, породжується скінченою кількістю парних і непарних генераторів. Саме непарні генератори, діючи на стани системи, переводять бозони у ферміони і навпаки. При поєднанні незвідних представлень алгебри супертрансляцій з кількома незвідними представленнями групи Пуанкаре із однією масою і різними значеннями спіна одержують супермультиплети частинок. При цьому стани (частинки), які відносяться до одного супермультиплета, називають суперпартнерами. Існування таких супермультиплетів і є одним із найважливіших результатів суперсиметричних теорій. Часто вклади суперпартнерів у суперполя компенсують один одного, що спричиняє скорочення деяких, наприклад, так званих, ультрафіолетових розбіжностей. У інших випадках спостерігається послаблення таких розбіжностей.

Алгебра суперсиметрії відображає суть релятивістської квантової теорії поля, і саме цієї області фізики стосуються найважливіші результати, пов'язані із суперсиметрією. Проте, суперсиметричні теорії поля є багатовимірними, і знаходження їх розв'язків складає значні труднощі. Поряд із цим застосуванням теорії суперсиметрії розвиваються також інші її напрямки, серед яких різні варіанти суперсиметричної квантової механіки, які, зберігаючи найважливіші риси суперсиметричних теорій поля, мають значно простішу структуру, і тому дають змогу вивчити особливості суперсиметрії значно глибше і детальніше. Один із варіантів суперсиметричної квантової механіки (SUSY QM), що запропонований Е.Віттеном [3] базується на найпростішій супералгебрі, яка породжується одним парним генератором і двома непарними. Саме цей варіант суперсиметричної квантової механіки, початково запропонований як модель для тестування суперсиметричних теорій, дуже швидко знайшов своє застосування до розв'язку багатьох задач нерелятивістської квантової механіки, а також дав змогу сформувати інший погляд на традиційні задачі квантової механіки. Зазначимо, що суперсиметрична квантова механіка зберігає усі властивості суперсиметричних теорій, зокрема, і такі як: факторизований вигляд гамільтоніана, невід'ємність його спектру, двократне виродження станів та рівність нулю енергії основного стану, який може бути невиродженим. Саме завдяки двом останнім властивостям вдається знайти, за певних умов, точні розв'язки системи.

Важливою властивістю точно розв'язуваних задач із гладким потенціалом є те, що всі вони виникають у методі факторизації [19]. Метод факторизації у застосуванні до квантової механіки, запропонований Е.Шредингером [4] та узагальнений у роботах Л.Інфельда та Т.Голла (див. огляд [5]). Загальний підхід до факторизації стосовно диференціальних рівнянь полягає у заміні одного диференціального рівняння другого прядку із заданими граничними умовами еквівалентною до нього системою двох диференціальних рівнянь першого порядку. Для широкого класу цих рівнянь метод факторизації дає змогу знайти значення і виробити рецепт одержання нормованих власних функцій. У огляді [5] проаналізована велика кількість диференціальних рівнянь другого порядку при різних граничних умовах, які можна факторизувати.

Як показано у [6], точні розв'язки існують для так званих форм-інваріантних потенціалів. Потенціал називають форм-інваріантним, якщо його суперсиметричний партнер має таку ж саму залежність від координат і відрізняється лише значеннями параметрів, що входять у нього включно із адитивною константою. Завдяки форм-інваріантності потенціалу повний спектр гамільтоніана можна знайти звичайними алгебраїчними методами.

Ще один клас потенціалів, для яких можна знайти точні розв'язки – так звані самоподібні потенціали, тобто потенціали пов'язані перетвореннями масштабування. Концепція самоподібних потенціалів вперше розглядалася [7, 8] у контексті оберненої задачі розсіювання. Суперпотенціал називають самоподібним, якщо $W_{i+1} = pW_1(px)$, де $i = 1, 2, \ldots$, $0 < p < 1$ – параметр деформації, а $W_i(x)$ – і-ий суперпотенціал ієрархії суперпотенціалів. Як і для форм-інваріантних потенціалів увесь спектр самоподібних потенціалів можна знайти алгебраїчними методами. У [9, 10] показано, що самоподібні потенціали є особливим видом форм-інваріантних потенціалів, а у [12] виявлено, що і їх алгебри – тісно пов'язані між собою та пов'язані із q-алгебрами. У [11] розкрито зв'язок методики самоподібних потенціалів із методом факторизації.

Ще один підхід, у якому також вдається знайти точні розв'язки одновимірного рівняння Шредінґера, пов'язаний із так званими ізоспектральними потенціалами, тобто потенціалами, які при їх перетвореннях не змінюють енергетичний спектр. Тобто, якщо із одного одновимірного потенціалу, для якого існує n зв'язаних станів, побудувати n-параметричний потенціал із такими ж власними значеннями, то останній потенціал називають ізоспектральним із вихідним. Той факт, що такі множини потенціалів існують, було відомо давно [13].

Поява суперсиметричної квантової механіки призвела до відродження інтересу у визначенні ізоспектральних потенціалів [14–16]. Підхід, що базується на ізоспектральних потенціалах, використовується і при генеруванні нових точно розв'язуваних потенціалів.

Проте, спроби знайти нові точно розв'язувані задачі наштовхуються на складнощі, які приводять до того, що такі моделі вдається відшукати все рідше і рідше. Але можна спробувати послабити вимоги точно розв'язуваності, і розглянути задачі, для яких спектральна проблема розв'язувалась би не для всього спектру, а лише для якоїсь його частини. Звичайно, що ці задачі є настільки ж корисними як і точно розв'язувані, і можуть застосовуватися для моделювання різних фізичних явищ. Такі задачі стали називати квазіточно роз'язуваними. Першою моделлю, для якої було знайдено два точних стани для потенціалів виражених через гіперболічні функції була одержана в [17]. Подібну модель із поліноміальними потенціалами було одержано у [18].

В подальшому вдалося сформулювати загальні принципи дослідження квазіточно розв'язуваних моделей. Таких підходів було виділено два. Один із них – алгебраїчний, сформульований у [19], базується на тому, що квазіточно розв'язувані моделі квантової механіки характеризуються групами прихованої динамічної симетрії [21], скінченновимірні представлення яких генерують ділянки спектру скінченої розмірності. Одним із прикладів такої симетрії описується групою $sl(2)$. Огляд робіт стосовно фізичних квазіточно розв'язуваних задач наведено у [22].

Було розвинуто багато різних методів генерування КТР потенціалів. У одному із підходів, запропонованому у [19], замість того щоби розв'язувати рівняння Шредінґера при заданому потенціалі, можна відтворити потенціал для будь-якої функції, яку можна вважати хвильвовою. Цей підхід узагальнено в [23] і одержано загальний вираз для квазіточно розв'язуваних потенціалів із двома точними станами. На цій методиці базуються і роботи [24–26]. У роботі [80] узагальнення підходу [19] ґрунтується на використанні поліноміального анзацу, відмінною особливістю якого є наявність експоненціального множника, введеного задля задоволення граничних умов, що дає змогу одержати три-параметричні потенціали у загальнішій, порівняно з іншими підходами, формі. У цій роботі для генерування КТР потенціалів також використано методику точкових канонічних перетворень. Цей підхід мотивований тим, що всі точно розв'язувані потенціали, що базуються на рівнянні Шредінґера, пов'язані між собою точковими канонічними перетвореннями. У роботі також застосовується третій метод, що базується на використанні техніки суперсиметричної квантової механіки.

Зазначимо також, що для генерування КТР потенціалів для одновимірного рівняння Шредінґера використовується також інтегральні перетворення Абрагама - Мозеса - Пюрсея [14,30], які базуються на методиці оберненої задачі квантової теорії розсіювання. Сумісне використання цієї методики із якісними методами управління спектрами [32], розвинутими на основі перетворення Дарбу, яке дає змогу досить просто одержувати розв'язки перетвореного рівняння Шредінґера

Ще один підхід до генерування КТР потенціалів ґрунтується на так званому анти-ізоспектральному перетворенні [28], яке, змінюючи вигляд потенціалу, також змінює на протилежний знак скінченої кількості енергетичних рівнів. Застосування цього перетворення, яке також називають дуальним, вдалося побудувати цікаві класи потенціалів, вивчити його наслідки [29] та показати зв'язок цього підходу із перетворенням Дарбу та підходом [14, 30, 31] на основі рівняння Гельфанда-Левітана.

Потужним інструментом конструювання КТР потенціалів виявилась і суперсиметрична квантова механіка [27,33,34]. Можливість конструювання потенціалів у цьому підході базується на подвійному виродженні спектра і взаємозв'язку потенціалів суперсиметричних партнерів. Тобто, якщо нам відомий $(n+1)$ – ий власний стан деякого суперсиметричного потенціалу, то відшукавши його суперсиметричного партнера, одержуємо новий КТР потенціал із відомими n власними станами. Зазначимо, що процедуру генерування потенціалу можна повторювати багатократно. Стандартні методи суперсиметричної квантової механіки можна застосувати і для створення множини кількапараметричних ізоспектральних потенціалів.

У роботі [35] на основі суперсиметричної квантової механіки узагальнено метод генерування КТР потенціалів із двома відомими власними станами на випадок, коли для відшукання КТР потенціалу непотрібне знання вихідного. Цей підхід базується на розгляді рівняння Рікатті, яке хоч і не можна розв'язати, але перейшовши до до нових величин, які є лінійними комбінаціями суперпотенціалів W і W_1 можна підібрати таку їх пару, яка задовольнятиме це рівняння. Здійснивши зворотне перетворення вдається знайти пару КТР суперпотенцілів. У роботі [36] цей підхід узагальнено на випадок генерування КТР потенціалів із трьома відомими власними станами. Важливо, що запропонований підхід можна узагальнити для генерування умовно-точно розв'язуваних потенціалів [115]. У роботі [37] цю методику узагальнено для генерування КТР потенціалів із двома довільними енергетичними рівнями, а не обов'язково основного стану і першого збудженого рівня.

Серед квазіточно розв'язуваних задач актуальною є і задача із періодичним потенціалом. Добре відомими є клас тригонометричних періодичних потенціалів [38] та періодичних потенціалів Ламе [39–41].

Стосовно потенціалів Ламе були застосовані підходи, пов'язані із алгебризацією відповідних рівнянь [40, 42]. У роботі [43], використовуючи приховану алгебраїчну структуру гамільтоніана, а саме групу SL(2), запропоновано єдиний підхід до генерування КТР потенціалів. Також ряд нових КТР потенціалів одержано із застосуванням самоізоспектральних перетворень [42].

Для одержання періодичних КТР потенціалів застосовані методи суперсиметричної квантової механіки, завдяки цьому вдалося знайти багато нових КТР потенціалів [39, 44, 45]. Зокрема, суперсиметричний підхід дав змогу одержати форм-інваріантні періодичні потенціали [46]. До періодичних потенціалів також були застосовані суперсиметричні перетворення вищих порядків. Для моделей із періодичними потенціалами досліджено також порушення суперсиметрії [47].

На відміну від періодичних потенціалів для випадку невпорядкованих систем із фіксованим безладом кількість КТР моделей, для яких розв'язки можна одержати у аналітичній формі, є значно меншою. Лише для деяких невпорядкованих систем можна знайти явний вираз для хвильової функції основного стану. Відомими є задачі про одновимірний рух ферміонів Дірака із випадковою масою [48], чи їх двовимірний рух у випадковому магнітному полі [49, 50] та деякі точні результати стосовно статистичних властивостей енергетичних рівнів та хвильових функцій невпорядкованих систем [51–53].

В останні десять років виконані роботи, у яких до розгляду невпорядкованих систем застосовувалися методи суперсиметричної квантової механіки. Наприклад у роботі [54] зроблено короткий огляд суперсиметричної квантової механіки та розглянуто властивості станів із низькою енергією для невпорядкованостей, що описуються деякою функцією розподілу, і, зокрема, розподілом Пуассона. У іншій роботі автора [55] суперсиметрична квантова механіка застосована до системи із неупорядкованістю типу шуму Леві. Порушення суперсиметрії для одновимірного випадкового гамільтоніана із гаусівським білим шумом проаналізовано у роботі [56].

У наших роботах [90–92] метод, розвинутий у [35–37], застосовано для генерування КТР періодичних потенціалів з двома і трьома відомими енергетичними рівнями та випадкових КТР потенціалів.

Квазіточно розв'язувані задачі можуть бути розглянуті і для випадків, коли маса системи є функцією від координат. Вперше увагу до таких задач звернуто у роботі [57], у якій методом ефективної маси розглянута задача про тунелювання електронів через гетероперехід між двома напівпровідниками. При цьому для того, щоби задовольнити умову неперервності густини струму через бар'єр, довелося ввести два параметри, один із яких пізніше [58] був ідентифікований як ефективна маса, що залежить від координат. У цій роботі [58] вивчалося тунелювання електронів через так звані структури метал-діелектрик-напівпровідник (див.також [59]), і тут же був наведений явний вигляд гамільтоніана, у який входила ефективна маса, яка залежала від координат, та вперше відмічено проблему некомутативності маси та оператора імпульсу у кінетичній енергії.

Моделі, у яких потенціал та ефективна маса є кусково-неперервними заданими функціями, стали предметом інтенсивних як теоретичних так і експериментальних досліджень (див., наприклад, [67, 85]).

Пізніше, практично важливі випадки такої залежності були виявлені у фізиці неоднорідно легованих напівпровідників, напівпровідникових гетероструктур, квантових ям, надграток тощо [85, 118]. Поняття ефективної маси постійно використовується в останніх дослідженнях [119, 124–126]. Концепція ефективної маси, що є функцією від координат знайшла також застосування у ядерній фізиці [120], теорії квантових рідин [121] та металічних кластерів [122].

При вивченні систем із масою, залежною від координат, виникають важливі загальнофізичні проблеми і, зокрема, проблема упорядкування некомутативних операторів координати та імпульсу у операторі кінетичної енергії, уточнення граничних умов при переході через поверхню, на якій потенціал та ефективна маса є розривними функціями, проблема галілеївської інваріантності систем із позиційно-залежною масою [67, 74, 123, 127, 128].

Загальний підхід до формування операторів квантовомеханічних величин, що відповідають класичним величинам був сформульований у роботах засновників квантової механіки М.Борна, П.Йордана, Г.Вейля, П.Дірака та Дж.фон Неймана між 1925 та 1927 роками. Цю складну проблему, розвинуту у наступні роки, узагальнено у роботі [61]. У останні десятиліття запропоновано декілька способів упорядкування операторів координати та імпульсу у гамільтоніані із просторово залежною масою.

Достатньо загальний вигляд гамільтоніану із просторово залежною масою був запропонований фон Россом [66]

$$H = \frac{1}{4}[m^{\alpha} p m^{\beta} p m^{\gamma} + m^{\gamma} p m^{\beta} p m^{\alpha}] + V(x), \tag{1.1}$$

у якому дійсні параметри α, β і γ задовольняють умову $\alpha+\beta+\gamma = -1$. Така форма гамільтоніана забезпечує його ермітовість та правильну асимптотику при переході до $m(x) = const$. Відомі декілька способів вибору параметрів. Зокрема, при виборі параметрів $\alpha = -1, \beta = \gamma = 0$ одержують гамільтоніан Гора і Вільямса [62], при виборі параметрів $\alpha = \gamma = 0, \beta = -1$ – гамільтоніан Бен Даніеля і Дюка [58], при виборі $\alpha = beta = -1/2, \gamma = 0$ – гамільтоніан Чжу і Кремера [63], при виборі

$\alpha = 0, \beta = \gamma = -1/2$ – гамільтоніан Лі і Куна [64], а при виборі $\alpha = \gamma = -1/4, \beta = -1/2$ – гамільтоніан Мустафи і Мажарімадзаві [65]. Цій проблематиці присвячені також роботи [60, 67, 74].

Загальна думка щодо вибору того чи іншого гамільтоніана полягає у тому, що не існує єдиного універсального вибору цих параметрів і залежить від характеру ефективної потенціальної енергії від координат та вигляду функції $m(x)$. Наприклад, застосування гамільтоніана [66] до гетеропереходу при значеннях параметрів $\alpha \neq \gamma$, при цьому хвильова функція прямує до нуля на гетерограниці і, як наслідок, гетероперехід стає непроникним бар'єром. Єдиним можливим випадком може бути лише $\alpha = \gamma$, що забезпечує неперервність конструкцій $m^i\psi(x)$ і $m(x)\partial_x\psi(x)$ на гетерограниці.

Протягом останніх років було досягнуто певного прогресу у вирішенні проблеми впорядкування. У [132, 133] проблема упорядкування розглянута при порівнянні точних результатів із результатами одержаними методами ефективної маси. У роботах [74, 87] методи квазіточно розв'язуваних потенціалів узагальнені на випадок маси, що залежить від координат. У роботі [134] показано, що відповідність між класичною та квантовою механікою може відігравати ключову роль у вирішенні неоднозначності в упорядкуванні операторів. У [135] запропоновано фізичний підхід до вирішення проблеми впорядкування операторів. Огляд проблеми впорядкування зроблено у недавній роботі [136].

Актуальною задачею в дослідженнях одновимірного рівняння Шредінґера із масою, що залежить від координат, є пошук його точних розв'язків. З цією метою було узагальнено багато підходів, розвинутих для пошуку квазіточних розв'язків одновимірного рівняння Шредінґера з постійною масою, а також розвинуто нові методики. Зокрема, у роботах [68, 69] для одержання квазіточних розв'язків застосовано формалізм узагальнених поліномів Лагерра при масових функціях обмежених на всій дійсній осі, які залежать від кількох параметрів. У рамках цього підходу знайдено замкнуті вирази для енергій та хвильових функцій зв'язаних станів та показано, при яких значень параметрів можна прийти до постійної маси, або прийти до відомих потенціалів, наприклад, потенціалу гармонічного осцилятора чи потенціалу Морса.

Проблемі одержання точних розв'язків для систем із масою, що залежить від координат, було присвячено ряд робіт [74–78, 87, 89, 127, 129, 130]. До знаходження точних розв'язків застосовувався також і метод суперсиметричної квантової механіки [74, 87].

Однак, кількість точно розв'язуваних задач є обмеженою. Тому цікавою і важливою залишається задача пошуку квазіточно розв'язуваних (КТР) потенціалів, для яких можна знайти точно кілька енергетичних рівнів і відповідних хвильових функцій [41, 43, 74, 79, 131, 137, 138]. Серед них - квазіточно розв'язувані потенціали із масою, залежною від координат [79, 131] та періодичні потенціали [41, 45, 47, 74]. Зазначимо, що хоча дослідження КТР потенціалів проводиться досить давно, до цього часу ця тематика залишається актуальною (див., наприклад, роботи [137, 138] та посилання у них).

Серед методик одержання квазіточних розв'язків були використані і узагальнені підходи, що базуються на точкових канонічних перетвореннях [70, 71]. Проведені систематичні дослідження цих перетворень щодо гіпергеометричних та інших спеціальних функцій і зв'язок цієї методики із алгебраїчними методиками, які були розвинуті на основі алгебр Лі [72, 73, 77]. З використанням цієї методики вдалося побудувати гамільтоніан та знайти деякі точні розв'язки для них. Зокрема, вдалося одержати два класи потенціалів, які включають майже всі відомі точно розв'язувані потенціали.

Для одержання квазіточних розв'язків було також узагальнено методику форм-інваріантних потенціалів для суперсиметричного представлення другого порядку [80] та нелінійну суперсиметрію [81].

Ще одне узагальнення щодо систем із залежною від координат масою стосується ізоспектральних потенціалів [82], для яких розвинуто підходи до формування ізоспектральних партнерів першого і другого порядків. Ця методика дає змогу генерувати ізоспектральні потенціали для довільних потенціалів та залежностей маси від координат, які залишають спектр незмінним.

У роботах [82, 83, 86] також показано, що у квантовомеханічних системах, маса яких залежить від координат, можна одержати дійсні квазіточні розв'язки і у випадку не-ермітових операторів кінетичної енергії. У роботі [83] цей підхід реалізований для випадку нелінійного осцилятора. У роботах [84,85] розглянуті періодичні системи із масою, залежною від координат.

До пошуку квазіточних розв'язків для систем із масою, залежною від координат, використовувалася і методика суперсиметричної квантової механіки [74,87–89]. У роботах [74,87,88] у рамках суперсиметричної квантової механіки розглянуто гамільтоніан із масою, залежною від координат, показано його зв'язок із деформованою алгеброю та проаналізовано умови форм-інваріантності потенціалів. Цю методику застосовано до конкретних задач і, зокрема, до кулонівської задачі та проаналізовано умови існування зв'язаних станів.

У наших роботах [93, 94, 96] підхід, розвинутий у [35–37], узагальнено на випадок систем із масою, що залежить від координат, і одержано КТР потенціали для основного і першого збудженого станів, двох довільних станів та періодичних КТР потенціалів систем із масою, яка є періодичною функцією від координат.

Розділ 2

Квазіточно розв'язувані періодичні потенціали

2.1 Вступ

Енергетичний спектр електронів у кристалі, як центральна проблема фізики твердого тіла, вивчався вже давно. Незважаючи на актуальність задачі, існує лише невелика кількість точно розв'язуваних періодичних потенціалів, навіть у одновимірному випадку. Добре відомою є так звана модель Кроніга-Пенні [110] або її граничний випадок "гребінець Дірака" [111]. Дослідженою є також група періодичних потенціалів - потенціалів Ламе [109, 112].

Оскільки кількість точно розв'язуваних потенціалів є дуже невеликою, значну увагу приділяють квазіточно розв'язуваним (КТР) потенціалам, для яких вдається відшукати точні розв'язки для невеликої кількості енергетичних рівнів та відповідних хвильових функцій. Загальний підхід до цієї проблеми був сформульований А.Турбінером та А.Ушверідзе [106,108]. Класифікацію тригонометричних КРТ потенціалів подано у [38]. Автори роботи [113] розглянули групу спектральних рівнянь, які узагальнюють КТР рівняння Ламе [41, 109]. Потужний метод конструювання КТР потенціалів дає суперсиметрична квантова механіка, яку для періодичних потенціалів вперше застосовано у роботі [114]. Тобто, суперсиметрична квантова механіка дає змогу ефективно відшукувати КТР потенціали. Визначальним у цьому підході є наявність деякого вихідного КТР потенціалу з $(n{+}1)$ відомими станами. Далі, оскільки методами суперсиметричної квантової механіки можна знайти суперсиметричного партнера цього потенціалу, то він і є новим КТР потенціалом із n відомими станами. У такий спосіб вдалося знайти велику кількість КТР потенціалів [27, 77].

У роботі [35] запропоновано суперсиметричний метод для генерування КТР потенціалів із двома відомими власними станами, який не вимагає знання вихідного КТР потенціалу для відшукання нового. У роботі [36] цей метод узагальнено на випадок генерування КТР потенціалів із трьома відомими власними станами. Перевагою запропонованого підходу є те, що його можна узагальнити з метою генерування умовно-точно розв'язуваних потенціалів. У роботі [37] розроблено суперсиметричний метод побудови КТР потенціалів із двома довільними енергетичними рівнями, а не обов'язково основного стану і першого збудженого рівня.

У наших роботах [90–92] шляхом узагальнення підходу, розвинутого у [35–37], знайдено квазіточно розв'язувані періодичні потенціали з двома та трьома відомими енергетичними рівнями і їх хвильові функції.

2.2 Суперсиметрична квантова механіка і квазіточно розв'язувані потенціали із двома рівнями

Суперсиметричний підхід до розв'язку квантовомеханічних задач базується на представленні гамільтоніана у вигляді матриці

$$H = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

що містить два суперсиметричних партнери $H_\pm$, які у системі одиниць $\hbar = m = 1$ мають вигляд

$$H_\pm = B^\mp B^\pm = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V_\pm(x), \tag{2.2}$$

де

$$B^\mp = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mp\frac{d}{dx} + W(x)), \tag{2.3}$$

$V_\pm(x)$ – потенціали суперсиметричних партнерів,

$$\begin{aligned} V_\pm(x) &= \frac{1}{2}(W^2(x) \pm W^{'}(x)), \\ W^{'}(x) &= \frac{dW(x)}{dx}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$W(x)$ – суперпотенціал.

Ми розглянемо системи із періодичним суперпотенціалом $W(x + L) = W(x)$ на всій дійсній осі $-\infty < x < \infty$. Цей суперпотенціал приводить до періодичної потенціальної енергії $V_\pm(x + L) = V_\pm(x)$.

Дослідимо задачу на власні значення із гамільтоніаном H_-

$$B^+B^-\psi_E^-(x) = E\psi_E^-(x). \tag{2.5}$$

Можна показати, що власні функції операторів H_- і H_+ пов'язані між собою як

$$\begin{aligned} \sqrt{E}\psi_E^+(x) &= B^-\psi_E^-(x), \\ \sqrt{E}\psi_E^-(x) &= B^+\psi_E^+(x). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Внаслідок того, що суперсиметричні партнери представлені у факторизованому вигляді, нескладно знайти розв'язок для стану із нульовою енергією за умови, що він є власним значенням гамільтоніана H_-

$$E_0^- = 0, \tag{2.7}$$

і має вигляд

$$\psi_0^-(x) = C_0^- \exp\Big(-\int W(x)dx \Big), \tag{2.8}$$

де C_0^--константа нормування.

Для періодичних систем хвильові функції мають блохівський вигляд. Тоді для основного стану із нульовою енергією повинні бути періодичними функціями з таким самим періодом L, що і потенціальна енергія. Суперпотенціал у цьому випадку є періодичною функцією і повинен задовольняти співвідношення [45, 47]

$$\int_0^L W(x)dx = 0, \tag{2.9}$$

які приводять до обмеженості хвильової функції. У [45,47] є детальний аналіз суперсиметричної квантової механіки для цього випадку.

Для того щоби одержати більше ніж один стан оператора H_-, використаємо добре відому у суперсиметричній квантовій механіці процедуру. Розглянемо суперсиметричного партнера H_- тобто оператор H_+. Розрахувавши деякий стан оператора H_+, ми тим самим знайдемо наступний збуджений стан оператора H_-, використовуючи перетворення (2.6). Для того щоби розрахувати деякий власний стан оператора H_+, перепишемо його у такій формі

$$H_+ = H_-^{(1)} + \varepsilon = B_1^+ B_1^- + \varepsilon, \varepsilon > 0, \tag{2.10}$$

яка приводить до такого співвідношення між потенціальними енергіями та суперпотенціалами

$$V_+(x) = V_-^{(1)}(x) + \varepsilon, \tag{2.11}$$

$$W^2(x) + W'(x) = W_1^2(x) + W_1'(x) + 2\varepsilon, \tag{2.12}$$

де ε є енергією стану оператора H_+, оскільки, як ми припустили, $H_-^{(1)}$ подібно до H_- має стан із нульовою енергією, $B_1^{\pm}$ і $V_-^{(1)}(x)$ задаються співвідношеннями (2.3) і (2.4) із новим суперпотенціалом $W_1(x)$.

Як видно із (2.10), хвильова функція оператора H_+ із енергією $E=\varepsilon$ є також хвильовою функцією стану із нульовою енергією оператора $H_-^{(1)}$ і задовольняє рівняння

$$B_1^-\psi_\varepsilon^+(x)=0. \tag{2.13}$$

Розв'язком цього рівняння є

$$\psi_\varepsilon^+(x)=C^+\exp\left(-\int W_1(x)dx\right). \tag{2.14}$$

Використовуючи (2.6), знайдемо хвильову функцію збудженого стану гамільтоніана H_+ із енергією стану $E=\varepsilon$

$$\psi_\varepsilon^-(x)=C^-W_+(x)\exp\left(-\int W_1(x)dx\right), \tag{2.15}$$

де ми ввели позначення $W_+(x)=W_1(x)+W(x)$.

Щоби одержати явний вираз для хвильових функцій $\psi_0^-(x)$ і $\psi_\varepsilon^-(x)$, які задаються співвідношеннями (2.8) і (2.15), необхідно знайти явний вираз для суперпотенціалів $W(x)$ і $W_1(x)$. Суперпотенціали $W(x)$ і $W_1(x)$ задовольняють рівняння (2.12). Це рівняння є диференціальним рівнянням Рікатті, загальний розв'язок якого відносно $W(x)$ при заданому $W_1(x)$ відшукати не вдається, як і у випадку, коли задано $W_1(x)$, а знайти треба $W(x)$. Проте можна відшукати таку пару суперпотенціалів $W(x)$ і $W_1(x)$, які задовольняють рівняння (2.12). Для цього введемо нові величини

$$W_+(x)=W_1(x)+W(x), \tag{2.16}$$

$$W_-(x)=W_1(x)-W(x), \tag{2.17}$$

за допомогою яких рівняння (2.12) запишеться як

$$W_+{}'(x)=W_-(x)W_+(x)+2\varepsilon. \tag{2.18}$$

Його легко можна розв'язати як відносно $W_-(x)$ при заданому $W_+(x)$, так і навпаки. Розглянемо розв'язок (2.18) для $W_-(x)$:

$$W_-(x) = (W_+'(x) - 2\varepsilon)/W_+(x). \tag{2.19}$$

Із співвідношень (2.18) одержуємо вираз для суперпотенціалів $W(x)$ і $W_1(x)$, що задовольняють рівняння (2.12)

$$\begin{aligned} W(x) &= \tfrac{1}{2}\Big(W_+(x) - \tfrac{W_+'(x)-2\varepsilon}{W_+(x)}\Big), \\ W_1(x) &= \tfrac{1}{2}\Big(W_+(x) + \tfrac{W_+'(x)-2\varepsilon}{W_+(x)}\Big), \end{aligned} \tag{2.20}$$

де $W_+(x)$ - є генеруючою функцією для суперпотенціалів.

Зазначимо, що співвідношення (2.20) рівняння (2.12) були одержані раніше у роботі [116] у рамках парасиметричної квантової механіки.

У роботі [35] були розглянуті лише несингулярні потенціали $W(x)$ і $W_1(x)$. У [37] було показано, що несингулярну потенціальну енергію можна одержати, використовуючи сингулярну генеруючу функцію $W_+(x)$. Тут ми застосовуємо результати роботи [37] до періодичних генеруючих функцій.

Випадок 1. Нехай $W_+(x)$ має прості нулі у точках x_k

$$W_+(x) = W_+'(x)(x - x_k) + W_+''(x)(x - x_k)^2 + O((x - x_k)^3). \tag{2.21}$$

Нулі функції $W_+(x)$ спричиняють появу полюсів у функції $W_-(x)$ і у суперпотенціалі $W(x)$ із такою поведінкою у околі x_k

$$W(x) = -\left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{W_+'(x_k)}\right)\frac{1}{x - x_k} - \frac{1}{2}\frac{W''(x_k)}{W'(x_k)}\left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{W'(x_k)}\right) + O(x - x_k). \tag{2.22}$$

Поведінка суперпотенціалу $W_1(x)$ у околі точок x_k подібна до поведінки $W(x)$ із протилежним знаком. Цей суперпотенціал призводить до такої поведінки потенціалу у околі точок x^k

$$V_-(x) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\epsilon}{W_+'(x_k)}\right)^2 - \frac{1}{4}\right\}\left\{\frac{1}{(x - x_k)^2} - \frac{W''(x_k)}{W'(x_k)}\frac{1}{(x - x_k)}\right\} + O(const). \tag{2.23}$$

Легко бачити, що при

$$W'_+(x_k) = \pm 2\epsilon, \tag{2.24}$$

потенціал $V_-(x)$ не матиме особливостей. Зручно поділити множину всіх x_k на дві підмножини x_k^+ і x_k^-, для яких $W'_+(x) = 2\epsilon > 0$ і $W'_+(x) = -2\epsilon < 0$. Тут вважатимемо, що $\epsilon > 0$. Оскільки $W'_+(x) = 2\epsilon > 0$, то сингулярності у точках x_k^+ знищуються, а $W(x)$ і $W_1(x)$ є сингулярними лише у точках x_k^-

$$\begin{aligned} W(x) &= \tfrac{-1}{x-x_k^-} + O(x - x_k^-), \\ W_1(x) &= \tfrac{1}{x-x_k^-} + O(x - x_k^-). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Підставляючи $W(x)$ у (2.8), можна довести, що хвильова функція, яка відповідає нульовій енергії, має нулі у точках x_k^-, а саме $\psi_0^- \sim (x - x_k^-)$ у околі точок x_k^-. Тому, що $W_+(x)$ задається співвідношенням (2.21), а $W_1(x)$ співвідношенням (2.25), знайдемо, що хвильова функція $\psi_\epsilon^-(x)$ із енергією ϵ має нулі у точках x_k^+: $\psi_\epsilon^-(x) \sim (x - x_k)$.

Випадок 2. Припустимо,що функція $W_+(x)$ має крім нулів також і прості полюси у точках x_k^0 із такою поведінкою в околі точок x_k^0

$$W_+(x) = \frac{G_{-1}}{x - x_k^0} + G_0 + O(x - x_k^0). \tag{2.26}$$

Тоді

$$\begin{aligned} W(x) &= \tfrac{1}{2}\,\tfrac{G_{-1}+1}{x-x_k^0} + \tfrac{1}{2}\,\tfrac{G_0}{G_{-1}}(G_{-1} - 1) + O(x - x_k^0), \\ W_1(x) &= \tfrac{1}{2}\,\tfrac{G_{-1}-1}{x-x_k^0} + \tfrac{1}{2}\,\tfrac{G_0}{G_{-1}}(G_{-1} + 1) + O(x - x_k^0). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Суперпотенціал $W(x)$ (2.27) дає несингулярну потенціальну енергію для *випадку 2a*: $G_{-1} = -1$ і G_0 довільній сталій, та для *випадку 2b*: $G_{-1} = -3$ і $G_0 = 0$.

Випадок 2a. Для випадку $G_{-1} = -1$ у околі точок x_k^0 ми маємо несингулярний суперпотенціал $W(x)$ і сингулярний $W_1(x)$

$$\begin{aligned} W(x) &= G_0 + (x - x_k^0), \\ W_1(x) &= \tfrac{-1}{x - x_k^0} + O(x - x_k^0). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Хвильові функції $\psi_0^-(x)$ і $\psi_\epsilon^-(x)$, обчислені із цим суперпотенціалом, не мають нулів у точках x_k^0. Легко бачити, що $\psi_0^-(x)$ має нулі у точках x_k^-, а $\psi_\epsilon^-(x)$ у точках x_k^+.

Випадок 2b. Випадок $G_{-1} = -3$ і $G_0 = 0$ приводить до суперпотенціалів із такою поведінкою у околі x_k^0

$$\begin{aligned} W(x) &= \tfrac{-1}{x - x_k^0} + O(x - x_k^0), \\ W_1(x) &= \tfrac{-2}{x - x_k^0} + O(x - x_k^0). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Хвильові функції $\psi_0^-(x)$ і $\psi_\epsilon^-(x)$, обчислені із цими суперпотенціалами, мають спільні нулі у точках x_k^0. Отже, на додачу до полюсів функції $W_+(x)$, що має нулі у точках x_k^+ і x_k^-, хвильова функція $\psi_0^-(x)$ має нулі у точках x_k^0, а хвильова функція $\psi_\epsilon^-(x)$ – у точках x_k^0, x_k^+.

Розглянемо загальний випадок, який поєднує випадки 1, 2a та 2b і приводить до несингулярного КТР періодичного потенціалу $V_-(x)$, визначеного у (2.2), для якого суперпотенціал $W(x)$, виражений через $W_+(x)$ за допомогою (2.16). Хвильова функція $\psi_0^-(x)$ стану із нульовою енергією і хвильова функція $\psi_\epsilon^-(x)$ із енергією ϵ задаються виразами (2.8) і (2.15) відповідно. Для того, щоб одержати обмежену хвильову функцію, суперпотенціали $W(x)$ і $W_1(x)$ повинні задовольняти умову (2.9). Один із найпростіших способів задовольнити умову (2.9) для $W(x)$ і $W_1(x)$ полягає у тому, щоб вибрати непарною і періодичною функцію $W_+(x)$. Тоді, як випливає із (2.20), суперпотенціали $W(x)$ і $W_1(x)$ будуть обмеженими періодичними функціями і задовольнятимуть умову (2.9).

Зазначимо, що у випадку несингулярного суперпотенціалу $W(x)$

хвильова функція стану із нульовою енергією відповідає основному станові, але у випадку сингулярного суперпотенціалу енергія основного стану є меншою від нуля, а хвильова функція стану з нульовою енергією відповідає збудженому станові.

2.3 Періодичні потенціали із двома точними розв'язками

Для періодичних систем хвильові функції мають блохівський вигляд

$$\psi(x+L) = exp(ikL)\psi(x), \tag{2.30}$$

де L - період потенціалу, у якому рухається електрон, k - квазі-імпульс, який змінюється у інтервалі $kL = 0, \pi$.

Згідно із осциляційною теоремою [107] енергетичний спектр такої системи має зонний характер, тобто власні значення утворюють смуги (зони) дозволених значень енергії $[E_0, E_1]$, $[E_1, E_2]$, ... , відокремлених зонами заборонених значень енергії. Осциляційна теорема також стверджує, що для періодичного потенціалу власні функції, які відповідають границям зон на інтервалі $[0, L]$, не мають вузлів для основного стану, мають один вузол для першого збудженого стану і т.д.

Зважаючи на те, що вигляд усіх наведених виразів визначається генеруючою функцією $W_+(x)$ та вибираючи її кожен раз іншою, можна прийти до різних КТР потенціалів. Наведемо деякі приклади таких несингулярних КТР періодичних потенціалів.

Приклад 2.1. Розглянемо неперервну функцію $W_+(x)$, що відповідає першому із розглянутих випадків

$$W_+(x) = \alpha \sin x, \tag{2.31}$$

де $\alpha > 0$. Ця функція має нулі із додатними похідними у точках $x_k^+ = 2\pi k$ і від'ємні похідні у точках $x_k^- = 2\pi(k+1)$. З умови несингулярності потенціальної енергії випливає, що $\epsilon = W'(2\pi k)/2 = \alpha/2$. Використовуючи (2.20) одержимо для суперпотенціалів такі вирази

$$\begin{aligned} W(x) &= \tfrac{1}{2}(\alpha \sin x + \mathrm{tg}\tfrac{x}{2}), \\ W_1(x) &= \tfrac{1}{2}(\alpha \sin x - \mathrm{tg}\tfrac{x}{2}). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Суперпотенціал $W(x)$ приводить до такого КТР потенціалу

$$16V_-(x) = \alpha(\alpha+4) - 2 - \alpha^2 \cos 2x - 8\alpha \cos x, \tag{2.33}$$

який є періодичною функцією із періодом $L = 2\pi$.

Хвильові функції стану із нульовою енергією і стану із енергією $\epsilon = \alpha/2$ матимуть вигляд

$$\psi_0^-(x) = C_0 \cos\frac{x}{2}\ \exp(\frac{\alpha}{2}\cos x), \tag{2.34}$$

$$\psi_\epsilon^-(x) = C_\epsilon \sin\frac{x}{2} \exp(\frac{\alpha}{2}\cos x). \tag{2.35}$$

Як видно із (2.34) та (2.35)функція $\psi_0^-(x)$ є періодичною із періодом $2L = 4\pi$ та має один вузол на інтервалі L і $\psi_0^-(x+2\pi) = -\ \psi_0^-(x)$. Хвильова функція $\psi_\epsilon^-(x)$ також є періодичною із періодом $2L = 4\pi$ та має один вузол на інтервалі L і $\psi_\epsilon^-(x+2\pi) = -\psi_\epsilon^-(x)$. Хвильова функція $\psi_0^-(x)$ відповідає енергії E_1, яка є енергією верхнього краю першої зони. Хвильова функція $\psi_\epsilon^-(x)$, відповідає енергії $E_{1'}$, яка є енергією нижнього краю другої зони. Отже, заборонена зона між першою та другою зоною складає $E_{1'} - E_1 = \epsilon = \alpha/2$. Зазначимо, що у цьому прикладі розглянуто один із потенціалів, вивчений у [38].

Приклад 2.2. Розглянемо складніший випадок, коли функція $W_+(x)$ має як нулі так і полюси. Однією із найпростіших таких функцій може бути така функція

$$W_+(x) = \alpha \sin(2x) + \mathrm{tg}x = (1 + 2\alpha \cos^2 x)\mathrm{tg}x. \tag{2.36}$$

Нехай $\alpha > -1/2$. Тоді нулі і полюси $W_+(x)$ породжуються лише функцією $\mathrm{tg}x$. Зазначимо, що ця генеруюча функція відноситься до випадку 2a.

Вибираючи

$$\epsilon = \frac{W_+{}'(0)}{2} = \alpha + \frac{1}{2}, \tag{2.37}$$

ми одержимо такі суперпотенціали

$$\begin{aligned} W(x) &= \tfrac{4+\alpha+\alpha\cos 2x}{1+\alpha+\alpha\cos 2x}\tfrac{\alpha}{2}\sin 2x, \\ W_1(x) &= \tfrac{2\alpha^2\cos^3 x\sin x + \mathrm{tg}x}{1+\alpha+\alpha\cos 2x} \end{aligned} \tag{2.38}$$

та несингулярний потенціал

$$\begin{aligned} 16V_-(x) &= -6+\alpha(12+\alpha) - 20\alpha\cos 2x - \alpha^2\cos 4x + \\ &\tfrac{6+24\alpha^2\cos^2 x}{(1+\alpha+\alpha\cos 2x)^2}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Потенціал $V_-(x)$ є періодичною функцією із періодом $L = \pi$. Для цих КТР потенціалів ми одержали точні хвильові функції, які відповідають нульовій енергії та енергії $\epsilon = \alpha + \frac{1}{2}$ відповідно

$$\begin{aligned} \psi_0^-(x) &= C_0(1+\alpha+\alpha\cos 2x)^{3/4}\exp\left(\tfrac{1}{4}\alpha\cos 2x\right), \\ \psi_\epsilon^-(x) &= C_\epsilon(1+\alpha+\alpha\cos 2x)^{1/4}\sin x\exp\left(\tfrac{1}{4}\alpha\cos 2x\right). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Як видно $\psi_0^-(x)$ є періодичною із періодом потенціалу $L = \pi$, не має вузлів та відповідає основному станові системи. Хвильова функція $\psi_\epsilon^-(x)$ має період $2L$, один вузол на інтервалі $L = \pi$ та задовольняє умову $\psi_\epsilon^-(x+\pi) = -\psi_\epsilon^-(x)$. Ця функція може відповідати верхньому краю енергії E_1 першої зони чи нижньому краю енергії $E_1^{'}$ другої зони. Для того, щоб визначити, якій зоні належить хвильова функція $\psi_\epsilon^-(x)$ слід розглянути систему на колі. Нехай кількість елементарних точок на колі рівна n. Тоді зона міститиме n рівнів. У даному випадку кількість нулів $W_+(x)$ на x_k^+ є такою ж як і кількість полюсів на x_k^0 та є рівною n. Тоді, відповідно до випадку 2a $\psi_\epsilon^-(x)$ має полюси у точках x_k^+, кількість яких дорівнює n. Отже, дана функція відповідає верхньому краю енергії E_1 першої зони. Зазначимо, що при $\alpha = 0$ приходимо до випадку вільної частинки.

Приклад 2.3. У цьому прикладі розглянемо генеруючу функцію, що відноситься до випадку 2b

$$W_+(x) = \alpha \sin 2x + 3\mathrm{tg}x = \Big(3 + 2\alpha \cos^2 x\Big)\mathrm{tg}x. \tag{2.41}$$

Нехай $\alpha > -3/2$. Тоді, як і у прикладі 2.2 нулі та полюси $W_+(x)$ виникають лише від функції $\mathrm{tg}x$. Вибираючи ϵ таким, що задається співвідношенням

$$\epsilon = \frac{W_+'(0)}{2} = \alpha + \frac{3}{2}, \tag{2.42}$$

одержимо суперпотенціали

$$\begin{aligned} W(x) &= \tfrac{\alpha}{2}\ \sin 2x + \mathrm{tg}x + \tfrac{3\alpha \sin 2x}{2(3+\alpha+\alpha\ \cos 2x)}, \\ W_1(x) &= 2\ \mathrm{tg}x + \tfrac{2\ \alpha^2\ \sin x\ \cos^3 x}{3+\alpha+\alpha\ \cos 2x}, \end{aligned} \tag{2.43}$$

та несингулярний потенціал

$$\begin{aligned} 16V_-(x) = -14 + \alpha\ (20+\alpha) - 28\ \alpha\ \cos 2x - \\ \alpha^2\ \cos\ 4x + \frac{54 - 24\ \alpha^2\ \cos 2x}{(3+\alpha+\alpha\ \cos 2x)^2}, \end{aligned} \tag{2.44}$$

який є періодичною функцією із періодом $L = \pi$. Для цих КТР потенціалів ми знайшли хвильові функції, що відповідають нульовій енергії та енергії $\epsilon = \alpha + 3/2$ відповідно

$$\begin{aligned} \psi_0^-(x) &= C_0(3+\alpha+\alpha\ \cos 2x)^{3/4}\ \cos x\ \exp\left(\tfrac{1}{4}\ \alpha\ \cos 2x\right), \\ \psi_\epsilon^-(x) &= C_\epsilon(3+\alpha+\alpha\ \cos 2x)^{1/4} \sin 2x\ \exp\left(\tfrac{1}{4}\alpha\ \cos 2x\right). \end{aligned} \tag{2.45}$$

Функція $\psi_0^-(x)$ є періодичною із періодом $2L = 2\pi$, має один вузол на інтервалі $L = \pi$ та задовольняє умову $\psi_0^-(x+\pi) = -\psi_0^-(x)$. Функція $\psi_\epsilon^-(x)$ також періодична із періодом $L = \pi$ та задовольняє умову

$\psi_\epsilon^-(x+\pi) = \psi_\epsilon^-(x)$. Для того, щоби визначити, до якої енергетичної зони відноситься ця хвильова функція, ми розглянемо нашу систему на колі подібно до прикладу 2.2.

У цьому випадку хвильова функція $\psi_0^-(x)$ має вузли у точках x_k^0, кількість яких дорівнює n, і, отже, вона відповідає енергії E_1 верхній межі першої енергетичної зони. Хвильова функція $\psi_\epsilon^-(x)$ має вузли у точках x_k^0 та x_k^+, кількість яких рівна $2n$ і тому ця функція відповідає верхній межі енергії E_2 другої зони. Зазначимо, що як і у прикладі 2.2, у цьому випадку при $\alpha = 0$ ми приходимо до вільних частинок.

2.4 Періодичні потенціали із трьома точними розв'язками

У цьому підрозділі застосуємо підхід, розвинутий у [36], до побудови періодичних потенціалів із трьома відомими власними станами. У попередньому підрозділі розглянуто систему рівнянь Рікатті при $n = 1$, яке у загальному випадку має вигляд

$$W_n^2(x) + W_n^{'}(x) = W_{n+1}^2(x) + W_{n+1}^{'}(x) + 2\varepsilon_n. \tag{2.46}$$

У цій частині роботи розглянемо систему рівнянь (2.46) для випадку $n = 2$, яка матиме вигляд

$$\begin{aligned} W_0^2(x) + W_0^{'}(x) &= W_1^2(x) - W_1^{'}(x) + 2\epsilon_0, \\ W_1^2(x) + W_1^{'}(x) &= W_2^2(x) - W_2^{'}(x) + 2\epsilon_1. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Зручно ввести нові функції

$$\begin{aligned} W_+(x) &= W_1(x) + W_0(x), \\ W_-(x) &= W_1(x) - W_0(x), \\ \tilde{W}_+(x) &= W_2(x) + W_1(x), \\ \tilde{W}_-(x) &= W_2(x) - W_1(x). \end{aligned} \tag{2.48}$$

через які суперпотенціали виражаються у такий спосіб

$$\begin{aligned} 2W_0(x) &= W_+(x) - W_-(x), \\ 2W_1(x) &= W_+(x) + W_-(x), \\ 2W_1(x) &= \tilde{W}_+(x) - \tilde{W}_-(x), \\ 2W_2(x) &= \tilde{W}_+(x) + \tilde{W}_-(x). \end{aligned} \tag{2.49}$$

Через ці нові функції рівняння (2.47) перепишемо так

$$\begin{aligned} W_+'(x) &= W_-(x)\, W_+(x) + 2\epsilon_0, \\ \tilde{W}_+'(x) &= \tilde{W}_-(x)\, \tilde{W}_+(x) + 2\epsilon_1. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Зазначимо, що у системі рівнянь (2.47) можна виразити $W_1(x)$ через $W_-(x)$ $\tilde{W}_+(x)$ двома способами. Це дає змогу одержати співвідношення, що пов'язує $W_+(x)$ з $\tilde{W}_+(x)$

$$W_+(x) + \frac{W_+'(x) - 2\epsilon_0}{W_+(x)} = \tilde{W}_+(x) - \frac{\tilde{W}_+'(x) - 2\epsilon_1}{\tilde{W}_+(x)}. \tag{2.51}$$

Це рівняння зручно переписати у такому вигляді

$$\begin{aligned} &W_+(x)\tilde{W}_+(x)[\tilde{W}_+(x) - W_+(x)] - [W_+(x)\, \tilde{W}_+(x)]' + \\ &+2[\epsilon_1 W_+(x) + \epsilon_0(x)\tilde{W}_+(x)] = 0, \end{aligned} \tag{2.52}$$

чи

$$U(x)\left(\frac{U(x)}{W_+(x)} - W_+(x)\right) - U'(x) + 2\left(\epsilon_1 W_+(x) + \epsilon_0 \frac{U(x)}{W_+(x)}\right) = 0, \tag{2.53}$$

де введено нову функцію

$$U(x) = W_+(x)\, \tilde{W}_+(x). \tag{2.54}$$

Ми знову приходимо до рівняння Рікатті із відповідною $U(x)$. З іншого боку ми маємо алгебраїчне рівняння відносно $W_+(x)$, яке можна точно розв'язати

$$\begin{aligned} W_+(x) &= \tfrac{2U(x)(U(x)+2\epsilon_0)}{U'(x)(1+R(x))}, \\ \tilde{W}_+(x) &= \tfrac{U'(x)(1+R(x))}{2(U(x)+2\epsilon_0)}, \end{aligned} \tag{2.55}$$

де

$$\mathfrak{R}(x) = 1 + 4\frac{U(x)(U(x)+2\epsilon_0)(U(x)-2\epsilon_1)}{U'(x)^2},\ \ R(x) = \pm\sqrt{\mathfrak{R}(x)}. \quad (2.56)$$

Корінь квадратний із $\mathfrak{R}(x)$ позитивно визначений, тоді як функцію $R(x)$ можна вибрати у формі $\sqrt{\mathfrak{R}(x)}$ чи $-\sqrt{\mathfrak{R}(x)}$ у різних інтервалах, відокремлених нулями функції $\mathfrak{R}(x)$.

Отже, можна почати із довільної функції $U(x)$ для конструювання функцій $W_+(x)$ і $\tilde{W}_+(x)$, заданих (2.55). Використовуючи (2.49), одержимо таких три суперпотенціали

$$\begin{aligned}
W_0(x) &= \tfrac{1}{2}\left(W_+(x) - \tfrac{W_+'(x)-2\epsilon_0}{W_+(x)}\right),\\
W_1(x) &= \tfrac{1}{2}\left(W_+(x) + \tfrac{W_+'(x)-2\epsilon_0}{W_+(x)}\right),\\
W_2(x) &= \tfrac{1}{2}\left(\tilde{W}_+(x) + \tfrac{\tilde{W}_+'(x)-2\epsilon_1}{\tilde{W}_+(x)}\right).
\end{aligned} \quad (2.57)$$

Тоді із (2.49) можна знайти хвильові функції точних власних станів гамільтоніана H_-

$$\begin{aligned}
\psi_0^-(x) &= C_0^- \exp^{-\int W(x)dx},\\
\psi_1^-(x) &= C_1^- \ W_+(x)\ \exp^{-\int W_1(x)dx},\\
\psi_2^-(x) &= C_2^- \ \left(\big(W_0(x)+W_2(x)\big)\tilde{W}_+(x) - \tilde{W}_+'(x)\right)\times\\
&\quad \times\exp^{-\int W_2(x)dx},
\end{aligned} \quad (2.58)$$

де значення енергії є такими $E_0^- = 0$, $E_1^- = \varepsilon_0$, $E_2^- = \epsilon_0+\epsilon_1$, а потенціал рівний

$$V_-(x) = \frac{1}{2}(W_0^2(x) - W_0'(x)). \quad (2.59)$$

Можна також знайти явний вираз для хвильових функцій двох відомих власних станів гамільтоніана H_+

$$\begin{aligned}
\psi_1^+(x) &= B_0^-\psi_1^-(x),\\
\psi_2^+(x) &= B_0^-\psi_2^-(x),
\end{aligned} \quad (2.60)$$

для енергій $E_1^+ = \epsilon_0$, $E_2^+ = \epsilon_0 + \epsilon_1$ та потенціалу (2.59)

$$V_+(x) = \frac{1}{2}(W_0^2(x) + W_0^{'}(x)). \tag{2.61}$$

Зауважимо, що одержані умови для суперпотенціалів, потенціалів та хвильових функцій враховують два різних розв'язки залежно від вибраного знаку перед квадратним коренем $\pm\sqrt{\Re(x)}$ у визначенні $W_+(x)$ і $\tilde{W}_+(x)$. Тут і надалі розрізнятимемо розв'язки, одержані для різних знаків, верхнім індексом у дужках після символу функції, наприклад, $Y(x)^{(+)}$. Позначатимемо як $Y(x)$ розв'язки однакові для різних знаків $Y(x)^{(+)} = Y(x)^{(-)}$.

Вибираючи різні генеруючі функції $U(x)$, одержимо різні КТР потенціали (2.59) із трьома явно заданими станами (2.58) та КТР потенціали (2.61) із двома відомими точно власними станами (2.60). Звичайно, що функція $U(x)$ повинна задовольняти деякі співвідношення для забезпечення фізичності розв'язків рівняння Шредінґера

Основною умовою, накладеною на функцію $U(x)$, є умова позитивної визначеності виразу під квадратним коренем (2.56)

$$1 + \frac{4U(x)(U(x) + 2\epsilon_0)(U(x) - 2\epsilon_1)}{U^{'^2}(x)} \geq 0 \tag{2.62}$$

на усьому інтервалі періодичності.

Інший набір обмежень, що накладаються на функцію $U(x)$, виникає внаслідок вимоги несингулярності потенціалу $V_-(x)$. Повний аналіз властивостей суперпотенціалу $W_0(x)$, які забезпечує несингулярність потенціалу $V_-(x)$ і хвильових функцій $\psi_0^-(x)$, $\psi_1^-(x)$, у термінах функції $W_+(x)$ даний при розгляді КТР потенціалів з двома точними власними значеннями. Тепер поширимо цей аналіз на випадок точних розв'язків для трьох власних станів.

Як видно із визначення суперпотенціалів $W_0(x)$, $W_1(x)$ і $W_2(x)$, потенціал $V_-(x)$ може мати полюси у точках x_0, у яких $W_+(x_0) = 0$ чи

$\tilde{W}_+(x_0) = 0$. Проте, такі полюси можна усунути, якщо [37]

$$\begin{aligned} W_+'(x_0)) &= \pm 2\epsilon_0, \\ \tilde{W}_+'(x_0) &= \pm 2\epsilon_1. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Крім того, потенціал $V_-(x)$ може мати полюси у точках сингулярності x_∞ функції $W_+(x)$. Як показано у [91], якщо поведінка функції $W_+(x)(x)$ у околі точок сингулярності x_∞ є

$$W_+(x) = const + \frac{-1}{x - x_\infty} + O(x - x_\infty), \tag{2.64}$$

чи

$$W_+(x) = \frac{-3}{x - x_\infty} + O(x - x_\infty), \tag{2.65}$$

то знайдені потенціал і хвильові функції у точках x_∞ будуть неперервними функціями.

Для забезпечення обмеженості і делокалізованого характеру хвильових функцій $\psi_0^-(x)$, $\psi_1^-(x)$, $\psi_2^-(x)$ завдяки співвідношенню (2.9) повинні задовольнятися умови

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^L W_0(x)dx &= 0, \\ \textstyle\int_0^L W_1(x)dx &= 0, \\ \textstyle\int_0^L W_2(x)dx &= 0. \end{aligned} \tag{2.66}$$

У найпростішому випадку ці умови задовольняються, коли відповідні суперпотенціали $W_0(x)$, $W_1(x)$, $W_2(x)$ є непарними функціями відносно середини інтервалу періодичності x_m. Для того, щоби суперпотенціали були непарними функціями, достатньо, щоби була непарною функція $W_+(x)$. Виберемо функцію $U(x)$ однаковою відносно середин інтервалу періодичності x_m. Тоді, використовуючи розв'язки із різними знаками перед квадратним коренем у частині інтервалу періодичності зліва і справа від x_m, $W_+(x)$ буде непарною функцією. Це легко помітити, якщо вираз (2.55) для $W_+(x)$ переписати у такому вигляді

$$W_+(x) = \frac{2\,U(x)(U(x)+2\epsilon_0)}{U'(x) \pm \sqrt{U'^2(x) + 4U(x)(U(x)+2\epsilon_0)(U(x)-2\epsilon_1)}}. \quad (2.67)$$

Використання розв'язків із різними знаками призводить до скінчених розривів функції $W_+(x)$, які можна усунути, якщо функція $W_+(x)$ прямуватиме до нуля зліва і справа.

Отже, для забезпечення існування обмежених делокалізованих хвильових функцій $U(x)$ повинна бути парною функцією відносно середини інтервалу періодичності x_m, а функція $W_+(x)$ мати у цих точках нулі. Функція $W_+(x)$ може мати також нулі у точках, у яких $U(x) = 0$, і тому, вона повинна бути парною функцією відносно x_m. У цих точках функція $U(x)$ може мати лише нулі парного порядку.

Звичайно, функція $U(x)$ може також мати нулі і у інших точках інтервалу періодичності. Розглянемо докладніше поведінку суперпотенціалів, потенціалу та хвильових функцій у околі нулів функції $U(x)$.

Нехай функція $U(x)$ має у околі точок x_0^a нулі першого порядку

$$U(x) = U^{'}(x)(x - x_0^a) + \frac{1}{2}U^{''}(x_0)(x - x_0^a)^2 + O(x - x_0^a)^3. \quad (2.68)$$

Тоді поведінка функцій $W_+(x)$, $\tilde{W}_+(x)$ в околі точок x_0^a буде такою

$$\begin{aligned} W_+(x)^{(+)} &= 2\epsilon_0(x - x_0^a)^2 + O(x - x_0^a)^3, \\ W_-(x)^{(-)} &= \tfrac{U^{'}(x_0^a)}{2\epsilon_1} + O(x - x_0^a), \\ \tilde{W}_+(x)^{(+)} &= \tfrac{U^{'}(x_0^a)}{2\epsilon_0} + O(x - x_0^a), \\ \tilde{W}_+(x)^{(-)} &= 2\epsilon_1(x - x_0^a) + O(x - x_0^a)^2. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Неважко зауважити, що функції $W_+(x)$ і $\tilde{W}_+(x)$ у точках x_0^a можуть мати ненульові значення чи нулі, які задовольняють (2.63).

Суперпотенціали $W_0(x)$, $W_1(x)$, $W_2(x)$ будуть такими

$$\begin{aligned} W_0(x)^{(\pm)} &= A_0^{(\pm)} + O(x - x_0^a), \\ W_1(x)^{(\pm)} &= A_1^{(\pm)} + O(x - x_0^a), \\ W_2(x)^{(\pm)} &= A_2^{(\pm)} + O(x - x_0^a), \end{aligned} \tag{2.70}$$

де

$$\begin{aligned} A_0^{(+)} &= -A_1^{(+)} = -\tfrac{8\epsilon_0^2\epsilon_1 + U'(x_0^a)^2 - \epsilon_0 U''(x_0^a}{2\epsilon_0 U'(x_0^a)}, \\ A_1^{(-)} &= -A_2^{(-)} = \tfrac{U'(x_0^a)^2 + \epsilon_1(U''(x_0^a) - 8\epsilon_0\epsilon_1)}{2\epsilon_1 U'(x_0^a)}, \\ A_0^{(-)} &= -A_2^{(+)} - \tfrac{U''(x_0^a) - 8\epsilon_0\epsilon_1}{2U'(x_0^a)}, \end{aligned} \tag{2.71}$$

Одержаний потенціал буде такою регулярною функцією

$$V_-(x)^{(\pm)} = \alpha_-^{(\pm)} + O(x - x_0^a), \tag{2.72}$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_-^{(-)} &= -\tfrac{1}{8U'(x_0^a)^2}\big(64\epsilon_0^2\epsilon_1^2 + 8\epsilon_1 U'(x_0^a)^2 + U''(x_0^a)^2 - \\ &\quad 16\epsilon_0(U'(x_0^a)^2 + \epsilon_1 U''(x_0^a)) - 2U'(x_0^a)U^{(3)}(x_0^a)\big), \\ \alpha_-^{(+)} &= -3\alpha_-^{(-)} + 4\epsilon_0 + \tfrac{U^{(3)}(x_0^a)}{2U'(x_0^a)}. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Хвильові функції $\psi_0^-(x)$, $\psi_1^-(x)$, $\psi_2^-(x)$ мають вигляд

$$\begin{aligned} \psi_0^-(x) &= 1 + O(x - x_0^a), \\ \psi_1^-(x)^{(+)} &= 2\epsilon_0(x - x_0^a) + O(x - x_0^a)^2, \\ \psi_1^-(x)^{(-)} &= \tfrac{U'(x_0^a)}{2\epsilon_1} + O(x - x_0^a), \\ \psi_2^-(x) &= -2\epsilon_1 + O(x - x_0^a). \end{aligned} \tag{2.74}$$

Отже, у точках x_0^a, у яких функція $U(x)$ має нулі першого порядку, потенціал $V_-(x)$ та хвильові функції $\psi_0^-(x)$, $\psi_1^-(x)$, $\psi_2^-(x)$ є неперервними функціями, а хвильова функція $\psi_1^-(x)$ у точках x_0^a може мати прості нулі залежно від знаку перед квадратним коренем.

Розглянемо потенціал $V_+(x)$, який є суперсиметричним партнером знайденого потенціалу $V_-(x)$. Потенціал $V_+(x)$ буде регулярною функцією у околі точок x_0^a, а саме

$$\begin{aligned} V_+(x)^{(\pm)} &= \alpha_+^{(\pm)} + O(x-x_0^a), \\ \alpha_+^{(+)} &= \alpha_-^{(-)} + 2\epsilon_1 + \tfrac{U'(x_0^a)^2 - 2\epsilon_0 U''(x_0^a)}{4\epsilon_0^2}, \\ \alpha_+^{(-)} &= \alpha_-^{(+)} - 2\epsilon_1, \end{aligned} \tag{2.75}$$

із неперервними хвильовими функціями

$$\begin{aligned} \psi_1^+(x) &= \sqrt{2}\epsilon_0 + O(x-x_0^a), \\ \psi_2^+(x)^{(+)} &= 2\sqrt{2}(\epsilon_0+\epsilon_1)(x-x_0^a) + O(x-x_0^a)^2, \\ \psi_2^+(x)^{(-)} &= \tfrac{(\epsilon_0+\epsilon_1)U'(x_0^a)}{\sqrt{2}\epsilon_0} + O(x-x_0^a). \end{aligned} \tag{2.76}$$

Залежно від вибраного знаку перед квадратним коренем хвильова функція $\psi_2^+(x)$ матиме вузли у точках x_0^b.

Тепер нехай функція $U(x)$ має у точках x_0^a нулі другого порядку

$$U(x) = \frac{1}{2}U''(x_0^b)(x-x_0^b)^2 + \frac{1}{6}U^{(3)}(x_0^b)^3 + O(x-x_0^b), \tag{2.77}$$

тоді поведінка функцій $W_+(x)$ і $\tilde{W}_+(x)$, буде такою

$$\begin{aligned} W_+(x) &= 2\epsilon_0(x-x_0^b) + O(x-x_0^b)^{3/2}, \\ \tilde{W}_+(x) &= 2\epsilon_1(x-x_0^b) + O(x-x_0^b)^{3/2}, \end{aligned} \tag{2.78}$$

і у точках x_0^b функції $W_+(x)$ і $\tilde{W}_+(x)$ можуть мати нулі. Беручи до уваги (2.63) можна легко знайти коефіцієнти розкладу

$$\begin{aligned} U''(x_0^b) &= \left(W_+(x_0^b)\,\tilde{W}_+(x_0^b)\right)'' = \\ &= W_+''(x_0^b)\,\tilde{W}_+(x_0^b) + 2W_+'(x_0^b)\tilde{W}_+'(x_0^b) + W_+(x_0^b)\tilde{W}_+''(x_0^b) = \\ &= 2W_+'(x_0^b)\,\tilde{W}_+'(x_0^b) = 8\epsilon_0\epsilon_1. \end{aligned} \tag{2.79}$$

Зазначимо, що існування дробових степенів у розкладах приводить до небажаних полюсів $W_0(x)$ у точках x_0^b.

$$W_0(x)^{(\pm)} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3U^{(3)}(x_0^b)}{\epsilon_0\epsilon_1(x-x_0^b)}} + O(x-x_0^b)^{1/2}, \tag{2.80}$$

які можуть призвести до сингулярності потенціалу $V_-(x)$. Неважко побачити, що у випадку $U^{(3)}(x_0^b) = 0$ дробові показники у розкладах зникають

$$\begin{aligned} W_+(x) &= 2\epsilon_0(x - x_0^b) + O(x - x_0^b)^2, \\ \tilde{W}_+(x) &= 2\epsilon_1(x - x_0^b) + O(x - x_0^b)^2. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Умова $U^{(3)}(x_0^b) = 0$ задовольняється найпростіше, якщо точка x_0^b є серединою інтервалу періодичності і $U(x)$ є парною функцією щодо x_0^b, якщо разом із тим задовольняються умови (2.66).

Тепер суперпотенціали можна записати

$$\begin{aligned} W_0(x)^{(\pm)} &= B_0^{(\pm)} + O(x - x_0^b), \\ W_1(x)^{(\pm)} &= B_1^{(\pm)} + O(x - x_0^b), \\ W_2(x)^{(\pm)} &= B_2^{(\pm)} + O(x - x_0^b). \end{aligned} \tag{2.82}$$

де

$$\begin{aligned} B_0^{(+)} &= B_1^{(-)} = B_2^{(+)} = B, \\ B_0^{(-)} &= B_1^{(+)} = B_2^{(-)} = -B, \\ B &= 1/4\sqrt{32(\epsilon_0 - \epsilon_1) + U^{(4)}(x_0^b)/2\epsilon_0\epsilon_1}. \end{aligned} \tag{2.83}$$

Визначений потенціал $V_-(x)$ буде неперервною функцією

$$\begin{aligned} V_-(x)^{(\pm)} &= \beta_-^{(\pm)} + O(x - x_0^b), \\ \beta_-^{(\pm)} &= \epsilon_0 + \tfrac{U^{(4)}(x_0^b)}{64\epsilon_0\epsilon_1} \mp \tfrac{U^{(5)}(x_0^b)}{320\ \epsilon_0\epsilon_1 B}. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Хвильові функції $\psi_0^-(x)$, $\psi_1^-(x)$, $\psi_2^-(x)$ можна записати як

$$\begin{aligned} \psi_0^-(x) &= 1 + O(x - x_0^b), \\ \psi_1^-(x) &= 2\epsilon_0(x - x_0^b) + (x - x_0^b)^2, \\ \psi_2^-(x) &= -2\epsilon_1 + O(x - x_0^b). \end{aligned} \tag{2.85}$$

Отже, у околі нулів другого порядку функції $U(x)$ потенціал $V_-(x)$ та хвильові функції $\psi_0^-(x)$, $\psi_1^-(x)$, $\psi_2^-(x)$ будуть неперервними функціями, якщо $x_0^b = x_m$ знаходиться усередині інтервалу періодичності і $U(x)$ є парною функцією відносно точки x_0^b. Хвильова функція $\psi_1^-(x)$ матиме вузол у точці x_0^b.

Суперсиметричний партнер $V_+(x)$ потенціалу $V_-(x)$ у околі x_0^b матиме таку поведінку

$$\begin{aligned} V_+(x)^{(\pm)} &= \beta_+^{(\pm)} + O(x - x_0^b), \\ \beta_+^{(\pm)} &= \epsilon_0 - 2\ \tfrac{U^{(4)}(x_0^b)}{64\epsilon_0\epsilon_1} \pm \tfrac{U^{(5)}(x_0^b)}{320\epsilon_0\epsilon_1 B}, \end{aligned} \tag{2.86}$$

із хвильовими функціями

$$\begin{aligned} \psi_1^+(x) &= \sqrt{2}\ \epsilon_0 + O(x - x_0^b), \\ \psi_2^+(x) &= 2\sqrt{2}\ \epsilon_1(\epsilon_0 + \epsilon_1)(x - x_0^b) + (x - x_0^b)^2. \end{aligned} \tag{2.87}$$

Таким чином, у околі нулів другого порядку x_0^b функції $U(x)$ потенціал $V_+(x)$ та відповідні хвильові функції $\psi_1^-(x)$, $\psi_2^-(x)$ будуть неперервними функціями, а хвильова функція $\psi_2^-(x)$ матиме вузол у точці x_0^b.

Проаналізуємо випадок, коли функція $U(x)$ має у точках x_0^c нулі та полюси вищого порядку для частинного випадку нулів третього порядку

$$U(x) = \frac{1}{6}\ U^{(3)}(x_0^c)(x - x_0^c)^3 + \frac{1}{24}U^{(4)}(x_0^c)(x - x_0^c)^4 + O(x - x_0^c)^5. \tag{2.88}$$

Тоді розклад функції $W_+(x)$ у околі точок x_0^c міститиме вклади, пропорційні $(x - x_0^c)^{3/2}$, і, отже, умова (2.63) не буде задовольнятися, а тому потенціал $V_-(x)$ матиме полюси у точках x_0^c. Отже функція $U(x)$ не може мати нулів вище другого порядку.

Сингулярності потенціалу, за винятком нулів $U(x)$, можуть з'явитися у точках, у яких $U^{'}(x) = 0$ чи $1 - \sqrt{R(x)} = 0$, тобто

$$\begin{aligned} U^{'}(x) &= 0, \\ U(x) &= 0, \\ U(x) &= -2\epsilon_0, \\ U(x) &= 2\epsilon_1. \end{aligned} \tag{2.89}$$

Випадок $U(x) = 0$ був детально розглянутий раніше. У околі точок a_0, у яких похідна від $U(x) = 0$ рівна нулю, тобто $U^{'}(a_0) = 0$ і $U(a_0) \neq 0$, генеруючу функцію $U(x)$ можна записати як

$$U(x) = U(a_0) + \frac{1}{2}\, U^{''}(a_0)(x - a_0)^2 + O(x - a_0)^3. \tag{2.90}$$

У цьому випадку поведінка функції $W_+(x)$ у околі a_0 буде такою

$$W_+(x)^{(\pm)} = \pm\sqrt{\frac{U(a_0)(2\epsilon_0 + U(a_0)))}{U(a_0) - 2\epsilon_1}} + \frac{U^{''}(a_0)}{4\epsilon_1 - 2U(a_0)}(x - x_0) + O(x - x_0)^2, \tag{2.91}$$

Іншими словами, у околі нулів $U^{'}(x)$, які не співпадають із нулями $U(x)$, одержані розв'язки будуть неперервними функціями.

У околі точки b_0, де $U(b_0) = 2\epsilon_1$, функція $W_+(x)$ буде вести себе як

$$\begin{array}{rcl} W_+(x)^{(+)} & = & \frac{4\epsilon_1(\epsilon_0+\epsilon_1)}{U^{'}(b_0)} + O(x - b_0), \\ W_+(x)^{(-)} & = & -\frac{1}{(x-b_0)} + const + O(x - b_0). \end{array} \tag{2.92}$$

Незважаючи на сингулярність функції $W_+(x)^{(-)}$, потенціал та хвильові функції будуть неперервними функціями, оскільки полюси $W_+(x)$ задовольняють умову (2.66).

У околі точки c_0, де $U(c_0) = -2\epsilon_0$, функцію $W_+(x)$ можна обчислити так

$$\begin{array}{rcl} W_+(x)^{(+)} & = & -2\epsilon_0(x - c_0) + O(x - b_0)^2, \\ W_+(x)^{(-)} & = & U^{'}(c_0)(x - c_0) + O(x - b_0), \end{array} \tag{2.93}$$

і, отже, потенціал та хвильові функції знову будуть неперервними функціями. Отже, у всіх точках, у яких знаменник $W_+(x)$ перетворюватиметься у нуль, потенціал $V_-(x)$ і хвильові функції $\psi_0^-(x)$, $\psi_1^-(x)$, $\psi_2^-(x)$ не матимуть особливостей.

Аналогічні міркування стосовно потенціалу $V_+(x)$ показують, що $V_+(x)$ та відповідні хвильові функції не матимуть особливостей у всіх розглянутих точках, крім точок c_0, у яких потенціал $V_+(x)^{(+)}$ матиме полюси із такою поведінкою

$$V_+(x)^{(+)} = \frac{1}{(x-c_0)^2} + const + O(x-c_0). \tag{2.94}$$

Проте, і її можна легко усунути, якщо у частині інтервалу періодичності, який містить точку c_0, замість $V_+(x)^{(-)}$ використати розв'язок $V_+(x)^{(+)}$.

Інший спосіб уникнути сингулярностей потенціалу $V_+(x)$ є виключення нулів у знаменнику $W_+(x)$, підбираючи амплітуди функції $U(x)$ такими, щоби рівняння $U(x)+2\epsilon_0=0$ і $U(x)-2\epsilon_1=0$ не задовольнялися. Справді, оскільки енергетичні рівні ϵ_0 і ϵ_1 є позитивно визначеними, а $U(x)$ - періодична обмежена функція, то завжди можна підібрати амплітуду генеруючої функції $U(x)$, використовуючи таке правило

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &< \tfrac{1}{2}\, min\, U(x), \\ \epsilon_1 &> \tfrac{1}{2}\, max\, U(x), \end{aligned} \tag{2.95}$$

де $min\ U(x)$ і $max\ U(x)$ - мінімальне та максимальне значення $U(x)$ на інтервалі періодичності.

Таким чином, періодична функція $U(x)$ генерує КТР потенціал із трьома відомими власними станами $\psi_0^-(x)$, $\psi_1^-(x)$, $\psi_2^-(x)$ та значеннями енергії $\epsilon_0 > 0$ $\epsilon_1 > 0$, якщо $R(x) \geq 0$ для всього інтервалу періодичності. Одночасно функція $U(x)$ генерує КТР потенціал $V_+(x)$ із двома відомими власними станами $\psi_1^+(x)$, $\psi_2^+(x)$ у випадку, коли $U(x) \in (-2\epsilon_0; 2\epsilon_1)$ і $R(x) \geq 0$ для всього інтервалу періодичності.

Для забезпечення несингулярності потенціалу та делокалізованості хвильових функцій $U(x)$ повинна бути парною функцією відносно середини інтервалу періодичності x_m та мати у цій точці нуль другого порядку. Генеруюча функція може мати нулі першого порядку у інших точках інтервалу періодичності, але не повинна мати нулів вищих порядків. Похідна $U'''(x)$ у точці x_m повинна задовольняти умову $U'''(x) = 8\epsilon_0\epsilon_1$. Слід також використовувати розв'язки протилежних знаків справа та зліва від точки x_m.

Для ілюстрації описаної методики розглянемо короткий приклад.

Тригонометричні розширення потенціалу Разаві. Почнемо із генеруючої функції

$$U(x) = 4\,\epsilon_0\,\epsilon_1 \sin^2 x. \tag{2.96}$$

Подібна генеруюча функція $U(x) = 4\,\epsilon_0\,\epsilon_1 \mathrm{sh}^2 x$ при $\epsilon_1 = \epsilon_0 + 1/2$ дає добре відомий КТР потенціал Разаві [36]. Тоді $\mathfrak{R}(x)$ можна записати у такому вигляді

$$\mathfrak{R}(x) = (1 + 2\epsilon_0 - 2\epsilon_1 + 4\epsilon_0\epsilon_1 \sin^2 x)\mathrm{tg}^2 x. \tag{2.97}$$

Опустимо загальний вираз для суперпотенціалів та потенціалів через їх громіздкість та такий, без якого можна обійтися. Існує принаймні три набори ϵ_0, ϵ_1, які дають змогу знайти корені функції $\mathfrak{R}(x)$, а, отже, спростити остаточний результат.

Перший набір є таким

$$\begin{array}{rcl} 4\epsilon_0\epsilon_1 & = & 0, \\ -1 + 2\epsilon_0 - 2\epsilon_1 & \geq & 0, \end{array} \tag{2.98}$$

для якого одержимо тривіальний розв'язок $\epsilon_0 = 0$ чи $\epsilon_1 = 0$, який приводить до $U(x) = 0$.

Для випадку другого набору

$$\begin{array}{rcl} -1 + 2\epsilon_0 - 2\epsilon_1 & = & -4\epsilon_0\epsilon_1, \\ -1 + 2\epsilon_0 - 2\epsilon_1 & \geq & 0, \end{array} \tag{2.99}$$

одержимо $\epsilon_1 = -1/2$. Тоді

$$W_+(x) = \frac{\epsilon_0\ \sin 2x}{1 + \sqrt{2\epsilon_0}\sin x}. \tag{2.100}$$

Функція $W_+(x)$ має нулі у точках $x_k = n\pi/2,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Похідні $W'_+(x)$ у цих точках є $-2\epsilon_0/(1+\sqrt{2\epsilon_0})$ чи $2\epsilon_0$, а, отже, умова (2.63) не виконується.

Останній набір дає $\epsilon_1 = \epsilon_0 = -1/2$, тому квадратний корінь можна переписати як

$$\begin{aligned} R(x) &= 2\sqrt{\epsilon_0\epsilon_1}\sin x \mathrm{tg} x, \\ \epsilon_0 &\geq 0, \end{aligned} \tag{2.101}$$

Функція $W_+(x)$ матиме вигляд

$$W_+(x) = \frac{2\epsilon_0(\cos^2 x + 2\epsilon_0\sin^2 x)\mathrm{tg}x}{1+\sqrt{2\epsilon_0}\sin x\mathrm{tg}x}. \tag{2.102}$$

Функція $W_+(x)$ сингулярна у точках $x_k^{(1)} = \pm\arccos\sqrt{\epsilon_0/\epsilon_1} + 2\pi n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2\ \dots$ та $x_k^{(2)} = \pm\arccos\sqrt{-\epsilon_0/\epsilon_1} + 2\pi n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2\ \dots.$ Внаслідок обмеження $\epsilon_0 \geq 1/2$ розв'язки $x_k^{(1)}$ належать до комплексної площини і тому повинні бути відхилені. У точках $x_k^{(2)}$ функція $W_+(x)$ має прості полюси із коефіцієнтом -1, тому потенціал $V_-(x)$ буде регулярною функцією у точках $x_k^{(2)}$ для будь-яких ϵ_0. Крім того, функцію $W_+(x)$ має прості нулі у точках $x_k = \pi n,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots$. Похідні від $W_+(x)$ у цих точках рівні $2\epsilon_0$, так що умови, накладені на генеруючу функцію $U(x)$, забезпечує несингулярність дійсного потенціалу $V_-(x)$ і дає змогу знайти три власних стани потенціалу

$$V_-(x) = \epsilon_0 - 1/2 + 1/4\big(\epsilon_0\epsilon_1 - 6\sqrt{\epsilon_0\epsilon_1}\cos x - \epsilon_0\epsilon_1\cos 2x\big), \tag{2.103}$$

де $\epsilon_1 = \epsilon_0 - 1/2$. Значення енергії цих власних станів є $E_0^- = 0,\ E_1^- = \epsilon_0, E_2^- = \epsilon_0 + \epsilon_1$, хвильові функції такі

$$\begin{aligned} \psi_0^-(x) &= C_0^-\ e^{\sqrt{4\epsilon_0\epsilon_1}\cos^2\frac{x}{2}}\big(1 + 4\sqrt{\epsilon_0\epsilon_1}\cos x - \epsilon_0\epsilon_1\cos 2x\big), \\ \psi_1^-(x) &= C_1^-\ e^{\sqrt{4\epsilon_0\epsilon_1}\cos^2\frac{x}{2}}\epsilon_0\sin x, \\ \psi_2^-(x) &= C_2^-\ e^{\sqrt{4\epsilon_0\epsilon_1}\cos^2\frac{x}{2}}2\epsilon_1\big(1 + 4(\sqrt{\epsilon_0\epsilon_1} - \epsilon_0)\cos^2\tfrac{x}{2}\big). \end{aligned} \tag{2.104}$$

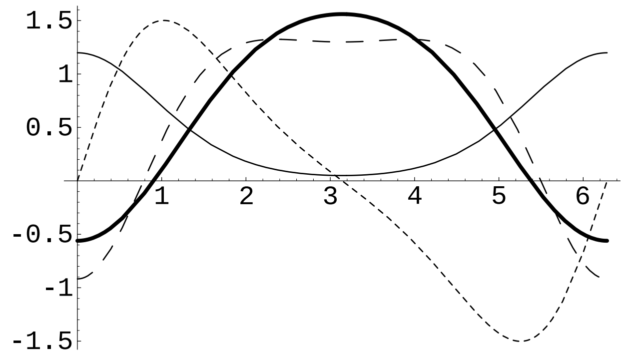

Рис. 2.1: Потенціал $V_{-}(x)$ (товста лінія) та хвильові функції $\psi_0^-(x)$, $\psi_1^-(x)$, $\psi_2^-(x)$ (суцільна, штрихова коротка і штрихова довга лінії відповідно) на проміжку $x \in [0, 2\pi]$. Тут взято $\epsilon_0 = 1$, $C_0^- = 0.05$, $C_1^- = 0.3$, $C_2^- = 1.3$.

Потенціал $V_{-}(x)$ і хвильові функції $\psi_0^-(x), \psi_1^-(x), \psi_2^-(x)$ зображено на рис.2.1.

Тому що хвильова функція $\psi_0^-(x)$ не має вузлів, власний стан з енергією $E_0 = 0$ є основним станом цього потенціалу. Хвильові функції $\psi_1^-(x)$ і $\psi_2^-(x)$ мають два вузли на інтервалі періодичності, тому власні стани із енергіями E_1^- і E_2^- відповідають границі другої забороненої зони.

Цей КТР потенціал відноситься до класу КТР потенціалів, представлених А.Турбінером у його роботі [38] у такій формі

$$V(x) = \frac{1}{2}\big(- a^2 \cos^2(2\alpha x) - 2\alpha a(2n+1)\cos(2\alpha x)\big), \tag{2.105}$$

у випадку $n = 1,\ \alpha = 1/2$; a є вільним параметром квантовомеханічної задачі.

Розглянемо тепер суперсиметричного партнера потенціалу $V_{-}(x)$

$$V_{+}(x) = \frac{1}{2}\big(\epsilon_0 + \frac{3}{2}\epsilon_0 - \epsilon_0\epsilon_1 \cos^2 x\big) + \frac{\sum\limits_{i=0}^{7} a_i \cos^i x}{2\sum\limits_{i=0}^{8} b_i \cos^i x}, \tag{2.106}$$

у якому

$$\begin{aligned}
a_0 &= 16\epsilon_0^2\epsilon_1^2,\\
a_1 &= -8\sqrt{\epsilon_0\epsilon_1}\;\epsilon_0(2-5\epsilon_0+2\epsilon_0^2),\\
a_2 &= -12\epsilon_0(1-2\epsilon_0-12\epsilon_0^2+4\epsilon_0^3),\\
a_3 &= 8\sqrt{\epsilon_0\epsilon_1}(1+3\epsilon_0-12\epsilon_0^2+6\epsilon_0^3),\\
a_4 &= 1+16\epsilon_0-48\epsilon_0^2(1-\epsilon_0^2),\\
a_5 &= -6\sqrt{\epsilon_0\epsilon_1}(1+2\epsilon_0-12\epsilon_0^2+8\epsilon_0^3),\\
a_6 &= -8\epsilon_1^2\epsilon_0(3+2\epsilon_0),\\
a_7 &= 16\epsilon_1^2\epsilon_0\sqrt{\epsilon_0\epsilon_1},
\end{aligned} \tag{2.107}$$

$$\begin{aligned}
b_0 &= 8\epsilon_0\epsilon_1^2,\\
b_1 &= 8\epsilon_0^2\sqrt{\epsilon_0\epsilon_1},\\
b_2 &= -2\epsilon_0^2(1-12\epsilon_0+16\epsilon_0^2),\\
b_3 &= -8\epsilon_0\sqrt{\epsilon_0\epsilon_1}(3\epsilon_0-1),\\
b_4 &= \epsilon_0(1+10\epsilon_0-48\epsilon_0^2(1-\epsilon_0)),\\
b_5 &= 2\sqrt{\epsilon\epsilon}(1-8\epsilon_0+12\epsilon_0^2),\\
b_6 &= -2\epsilon_1^2(-1-4\epsilon_0+16\epsilon_0^2),\\
b_7 &= -8\epsilon_1^2\sqrt{\epsilon_0\epsilon_1},\\
b_8 &= 8\epsilon_0\epsilon_1^2.
\end{aligned} \tag{2.108}$$

Оскільки нам відомі власні функції $\psi_1^-(x)$ і $\psi_2^-(x)$ гамільтоніана H_-, то, використовуючи суперсиметричні перетворення (2.6), можна знайти хвильові функції $\psi_1^+(x)$ і $\psi_2^+(x)$, які є власними функціями гамільтоніана H_+ із відповідними енергіями $E_1^+=\epsilon_0$ і $E_2^+=\epsilon_0+\epsilon_1$:

$$\begin{aligned}
\psi_1^+(x) &= C_1^+\;\epsilon_0 e^{\sqrt{4\epsilon_0\epsilon_1}\cos^2\frac{x}{2}}\frac{\sum\limits_{i=0}^{4}k_i\cos^i x}{2\sum\limits_{i=0}^{4}l_i\cos^i x},\\
\psi_2^+(x) &= C_2^+\exp^{\sqrt{4\epsilon_0\epsilon_1}\cos^2\frac{x}{2}}\sin x\frac{\sum\limits_{i=0}^{3}m_i\cos^i x}{2\sum\limits_{i=0}^{4}n_i\cos^i x},
\end{aligned} \tag{2.109}$$

де

$$\begin{aligned} k_0 &= 4\sqrt{2}\epsilon_0\epsilon_1, \\ k_1 &= 4\sqrt{2\epsilon_0\epsilon_1}, \\ k_2 &= -\sqrt{2}(8\epsilon_0\epsilon_1 - 1), \\ k_3 &= -4\sqrt{2\epsilon_0\epsilon_1}, \\ k_4 &= 4\sqrt{2}\epsilon_0\epsilon_1, \end{aligned} \tag{2.110}$$

$$\begin{aligned} l_0 &= 4\epsilon_0\sqrt{\epsilon_0\epsilon_1}, \\ l_1 &= 2\epsilon_0, \\ l_2 &= 2(1-4\epsilon_0)\sqrt{\epsilon_0\epsilon_1}, \\ l_3 &= 2\epsilon_1, \\ l_4 &= 4\epsilon_1\sqrt{\epsilon_0\epsilon_1}, \end{aligned} \tag{2.111}$$

$$\begin{aligned} m_0 &= -\sqrt{2}\epsilon_0\epsilon_1(4\epsilon_0 - 1)(\epsilon_1 - \sqrt{\epsilon_0\epsilon_1}), \\ m_1 &= 2\sqrt{2\epsilon_0}(\epsilon_1 - \epsilon_0)(8\epsilon_0^3 - 14\epsilon_0^2 + 7\epsilon_0 - 1), \\ m_2 &= \sqrt{2}(\sqrt{\epsilon_0\epsilon_1}) - \epsilon_1)(1 - 4\epsilon_0 - 4\epsilon_0^2 + 16\epsilon_0^3), \\ m_3 &= -4\epsilon_1^2\sqrt{2\epsilon_0}(\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_0})(4\epsilon_0 - 1)), \end{aligned} \tag{2.112}$$

$$\begin{aligned} n_0 &= 2\epsilon_0\sqrt{\epsilon_0\epsilon_1}, \\ n_1 &= \epsilon_0, \\ n_2 &= -2(\epsilon_0 + \epsilon_1)\sqrt{\epsilon_0\epsilon_1}, \\ n_3 &= -\epsilon_1, \\ n_4 &= 2\epsilon_1\sqrt{\epsilon_0\epsilon_1}. \end{aligned} \tag{2.113}$$

Отже, ми одержали КТР потенціал $V_+(x)$ із двома точно відомими власними станами $E_1^+ = \epsilon_0$, $\psi_1^+(x)$ і $E_2^+ = \epsilon_0 + \epsilon_2$, $\psi_2^+(x)$, задані (2.109). Потенціал $V_+(x)$ та хвильові функції $\psi_1^+(x)$ і $\psi_2^+(x)$ зображені на рис.2.2.

Оскільки хвильові функції $\psi_1^+(x)$ і $\psi_2^+(x)$ мають по два нулі на інтервалі періодичності, власні стани з енергією E_1^+ і E_2^+ описують границю другої забороненої енергетичної они. Звертаємо увагу, що КТР

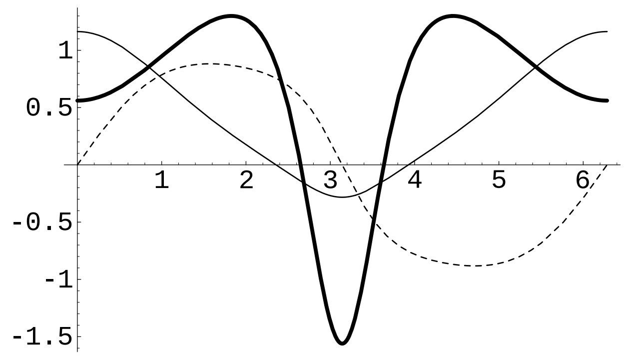

Рис. 2.2: Потенціал $V_+(x)$ (товста лінія) та хвильові функції $\psi_1^+(x)$, $\psi_2^+(x)$ (суцільна і штрихова лінії відповідно) на проміжку $x \in [0, 2\pi]$. Тут взято $\epsilon_0 = 1$, $C_1^+ = 0.2$, $C_2^+ = 0.7$.

потенціал (2.109) не належить до загального випадку Турбінера і є новим.

2.5 Висновки до розділу 2

В цьому розділі SUSY-метод конструювання КТР потенціалів запропонований у [35, 37], узагальнено для випадку періодичних потенціалів із двома та трьома точними розв'язками.

Вибираючи різні періодичні генеруючі функції $W_+(x)$, ми одержали три періодичні КТР потенціали, для яких явно знайшли два точних значення енергії та хвильових функцій. Перший із них відтворює один із потенціалів, раніше вивчений А.Турбінером [108], а два інших одержані уперше.

Аналіз одержаних результатів дав змогу зробити висновок про те, що знайдені розв'язки відносяться до верхньої межі першої енергетичної зони, що відповідає основному станові періодичної системи та нижній межі другої зони, що відповідає збудженому станові.

Для періодичних потенціалів із трьома точно відомими станами показано, що періодична функція $U(x)$ генерує КТР потенціал $V_-(x)$, для якого знайдено три точно відомих стани $\psi_0^-(x)$, $\psi_1^-(x)$ і $\psi_2^-(x)$ і КТР потенціал $V_+(x)$ із двома точно відомими станами $\psi_1^+(x)$ і $\psi_2^+(x)$. Показано, що потенціал не матиме особливостей, а хвильові функції описуватимуть делокалізовані стани, якщо генеруюча функція має нулі другого порядку всередині інтервалу періодичності та є парною функцією відносно середини інтервалу. Крім того, функція $U(x)$ може мати нулі першого порядку у інших точках інтервалу та не мати нулів вищого порядку, а друга похідна у особливій точці – задовольняти додаткову умову $U''(x) = 8\epsilon_0\epsilon_1$.

Як приклад, запропонований метод застосований до потенціалу, що є розширенням відомого потенціалу Разаві. При цьому один із власних його станів описує основний стан системи у першій енергетичній зоні, а два інших - збуджені стани, які відповідають другій зоні.

Результати цього розділу опубліковано у роботах [90, 91, 97].

Розділ 3

Квазіточно розв'язувані випадкові потенціали

3.1 Вступ

У попередньому розділі розглянуто квазіточно розв'язувані періодичні потенціали. Загальними властивостями задачі про розв'язки рівняння Шредінґера у полі періодичного потенціалу є наявність осциляційної теореми та блохівський вигляд хвильової функції. Важливим моментом також є наявність, хоч і обмеженої кількості, моделей із точно розв'язуваним періодичним потенціалом.

На відміну від задачі про поведінку електрона у періодичному полі для випадку руху у випадковому потенціалі не існує моделей, для яких були б відомі її точні розв'язки. Проте, для багатьох невпорядкованих систем вдалося знайти такий розв'язок для основного стану. Зокрема, точний розв'язок для основного стану знайдено для одновимірного руху ферміонів Дірака із випадковою масою [48] та двовимірного руху ферміонів Дірака у випадковому магнітному полі [49].

Внесення випадковості у потенціал значно ускладнює знаходження розв'язків задачі про рух електрона у ньому. На жаль, не існує теореми подібної до осциляційної, яка описує загальні властивості розв'язків рівняння Шредінґера з випадковим потенціалом. Можна розрахувати деякі статистичні характеристики випадкових потенціалів [117] та відповідних їм розв'язків рівняння Шредінґера, але випадкові потенціали, розв'язки рівняння на власні значення яких можуть бути знайдені в аналітичному вигляді, досі не були відомі.

Ми займатимемося вивченням неусереднених властивостей неупорядкованих систем на базі розширення методики SUSY для випадкових потенціалів. Розглянемо розв'язки одновимірного рівняння Шредінґера із випадковим потенціалом на всій осі $-\infty < x < \infty$. Для визначення останніх поділимо дійсну вісь на інтервали

$$l_i < x < l_{i+1} \tag{3.1}$$

і задамо потенціал на кожному із таких інтервалів

$$V(x) = V^i(x) = V(\alpha_i, x), \tag{3.2}$$

як функцію випадкової величини α_i, відомої для кожного інтервалу (3.1). Набір параметрів $\{\alpha_i\}$ є випадковим і відповідає конкретній реалізації невпорядкованого потенціалу.

Для кожного із інтервалів (3.1) визначені також суперпотенціали

$$W(x) = W^i(x), \tag{3.3}$$

Розв'язками задачі про рух електрона у випадковому потенціалі є функції, обмежені на усій дійсній осі. Існують різні способи забезпечення обмеженості розв'язків рівняння Шредінґера. Ми використаємо найпростішу достатню умову

$$\int_{l_i}^{l_{i+1}} W(x)dx = 0. \tag{3.4}$$

Ця умова є природним узагальненням відповідної умови для періодичного випадку.

3.2 Випадковий потенціал із одним точним розв'язком

Вибираючи різні випадкові суперпотенціали $W_i(x)$, можна легко побудувати нові КТР потенціали задані співвідношенням (2.4) із одним відомим власним станом. У найпростіший спосіб одержати несингулярний потенціал $V_-(x)$ можна, вибираючи суперпотенціал $W(x)$ регулярною функцією. Однак, існує і спосіб забезпечити несингулярність потенціалу $V_-(x)$ при використанні сингулярного суперпотенціалу із певною поведінкою у околі точок сингулярності [37, 90, 91]

Спочатку розглянемо модель із одним відомим розв'язком, у якій суперпотенціал має такі прості полюси у точках x_k:

$$W(x) = \frac{-1}{x - x_k} + A(x - x_k) + O((x - x_k)^2), \tag{3.5}$$

де A - деяка стала. Використовуючи співвідношення, що пов'язують суперпотенціал із потенціалом (2.2), знайдемо, що $V_-(x)$ буде регулярною функцією із такою поведінкою у околі точок x_k

$$2V(x) = -3A + O(x - x_k). \tag{3.6}$$

Хвильова функція стану із нульовою енергією у околі точок x_k має вигляд

$$\psi_0^-(x) \sim |x - x_k|\Big(1 - A\frac{(x - x_k)^2}{2}\Big). \tag{3.7}$$

Зазначимо, що похідні від цієї функції $d\psi_0^-(x)/dx$ у точках x_k мають розрив. Для забезпечення неперервності похідної від хвильової функції скористаємося тим фактом, що розв'язки рівняння Шредінґера визначені із точність до сталого множника. Тому, вибираючи відповідно знак хвильової функції, можна домогтися того, щоби і сама хвильова функція і її похідна були неперервними на кожному із інтервалів (3.1).

3.3 Невпорядкована модель Кроніга-Пенні із одним точним розв'язком

Розглянемо такий суперпотенціал

$$W(x) = \alpha_i \mathrm{tg}(\alpha_i(x - l_i)), \qquad \alpha_i > 0, \tag{3.8}$$

для якого для кожного значення i змінна x належить відповідному інтервалові (3.1), де

$$l_{i+1} = l_i + \frac{\pi}{\alpha_i}, \qquad l_0 = 0, \tag{3.9}$$

а α_i - випадкові параметри. Такий суперпотенціал задовольняє умову (3.4) для кожного із інтервалів (3.1), а, отже, знайдені хвильові функції будуть обмеженими на усій дійсній осі. У точках $l_i + \pi/2\alpha_i$, у яких суперпотенціал сингулярний, він має поведінку типу (3.5), причому $A = \alpha_i/3$.

Тоді потенціал на кожному з інтервалів (3.9) $l_i < x < l_{i+1}$ запишеться

$$V_{-}(x) = -3\frac{\alpha_i^2}{2}. \tag{3.10}$$

Потенціал $V_{-}(x)$ відповідає потенціалові неупорядкованої моделі Кроніга-Пенні. Хвильова функція стану із нульовою енергією має вигляд

$$\psi_0^{-}(x) = C_0^{-}(-1)^i \cos(\alpha_i(x - l_i)), \tag{3.11}$$

де для кожного i потенціал відповідає відповідному потенціалові. Множник $(-1)^i$ у цій функції забезпечує неперервність як самої хвильової функції так і її похідної.

Зазначимо, що існує інша лінійно-незалежна хвильова функція $\tilde{\psi}_0^{-}(x)$, яка також є розв'язком рівняння Шредінґера для тієї ж енергії

$$\tilde{\psi}_0^{-}(x) = \psi(x)\left(\int \frac{1}{\psi^2(x)}dx + C\right), \tag{3.12}$$

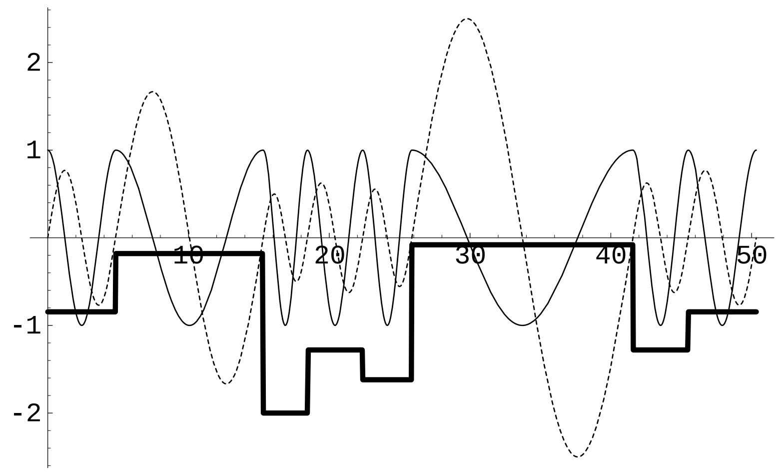

Рис. 3.1: Хвильові функції, які відповідають власному станові моделі Кроніга-Пенні з нульовим рівнем енергії для $i = 0..7$, $\alpha_i = \{1.3, 0.6, 2, 1.6, 1.8, 0.4, 1.6, 1.3\}$. Жирною лінією позначено випадковий потенціал $V_{-}(x)$, суцільна лінія відповідає $\psi_0^-(x)$, пунктирна - $\tilde{\psi}_0^-(x)$. Константи нормування C_0^- та C_1^- вибрані рівними одиниці

у чому можна переконатися прямою підстановкою $\tilde{\psi}_0^-(x)$ у рівняння Шредінґера. Після нескладних розрахунків отримаємо інший лінійно незалежний розв'язок для стану із нульовою енергією

$$\tilde{\psi}_0^-(x) = \tilde{C}_0^-(-1)^i \frac{1}{\alpha_i} \sin(\alpha_i(x - l_i)). \tag{3.13}$$

Потенціал $V_{-}(x)$ та хвильові функції $\psi_0(x)$ $\psi_\epsilon(x)$ зображено на рис.3.1.

Зауважимо, що при зміні випадкової величини α_i змінюється як глибина потенціальної ями $V_{-}^i = -\alpha_i^2/2$, так і її ширина $\Delta l_i = \pi/\alpha_i$, при цьому добуток

$$V_{-}^i \Delta l_i^2 = const \tag{3.14}$$

залишається сталим. Така кореляція між параметрами задачі є наслідком умови (3.4), яка забезпечує існування делокалізованих станів.

Зауважимо, що в нашій роботі [100] показано, як урахування неортогональності базису, на якому будується представлення вторинного квантування для гамільтоніану газу невзаємодіючих електронів на ґратці, також призводить до виникнення кореляцій між параметрами.

3.4 Квазіточно розв'язуваний випадковий потенціал із двома точними розв'язками

Знаходження ще одного власного стану вже не є такою тривіальною задачею. Вимога несингулярності потенціалу $V_(x)$ накладає обмеження на генеруючу функцію $W_+(x)$. Як показано у [37] потенціальну енергію, що не має особливостей, можна одержати також і у тому випадку, коли генеруюча функція має значну кількість нулів та полюсів. Шляхом прямої перевірки можна переконатися, що у цьому випадку генеруюча функція повинна задовольняти такі умови:

(a) Нехай $W_+(x)$ має прості нулі у точках x_k. Тоді модуль похідної у цих точках повинен бути $|W_+'(x_k)| = 2\epsilon$. Зручно розбити множину x_k на дві підмножини x_k^- і x_k^+, для яких $W_+'(x_k^+) = 2\epsilon > 0$ та $W_+'(x_k^-) = -2\epsilon < 0$. У цьому випадку суперпотенціали матимуть прості полюси у точках x_k^-

$$
\begin{aligned}
W(x) &= \tfrac{-1}{x-x_k} + O(x-x_k), \\
W_1(x) &= \tfrac{1}{x-x_k} + O(x-x_k).
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Розглянемо тепер функцію $W_+(x)$, що має сингулярності у точках a_k або b_k.

(b) Нехай функція $W_+(x)$ має прості полюси у точках a_k із такою асимптотичною поведінкою у околі цих точок

$$W_+(x) = \frac{-1}{x-a_k} + const. \tag{3.16}$$

У цьому випадку суперпотенціал $W(x)$ не матиме полюсів у точках a_k, а суперпотенціал $W_1(x)$ матиме полюси із такою поведінкою

$$W_1(x) = \frac{-1}{x - a_k} + O(x - a_k). \tag{3.17}$$

(c) Нехай функція $W_+(x)$ має прості полюси у точках b_k із такою асимптотичною поведінкою у околі цих точок

$$W_+(x) = \frac{-3}{x - b_k} + O(x - b_k). \tag{3.18}$$

Тепер суперпотенціали матимуть полюси із такою асимптотичною поведінкою

$$\begin{aligned} W(x) &= \tfrac{-1}{x-b_k} + O(x - b_k), \\ W_1(x) &= \tfrac{-2}{x-b_k} + O(x - b_k). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Зазначимо, що існування сингулярностей функції $W_+(x)$ із іншою поведінкою спричинить наявність сингулярностей у потенціалі $V_-(x)$, а функції $W_+(x)$, що мають перелічені властивості, генерують несингулярні КТР потенціали.

Хвильова функція стану із нульовою енергією $\psi_0^-(x)$ та хвильова функція $\psi_\epsilon^-(x)$ стану із енергією ϵ, що задаються виразами (2.8) та (2.15), матимуть вузли: хвильова функція $\psi_0^-(x)$ у точках x_k^- та b_k, а хвильова функція $\psi_\epsilon^-(x)$ - у точках x_k^+ та b_k.

Для одержання випадкового потенціалу розглянемо випадкову генеруючу функцію подібно до того. як це зроблено у (3.3)

$$W_+(x) = W_+^i(x), \tag{3.20}$$

де для даного i змінна x визначена на інтервалі (3.1). Вибираючи генеруючу функцію непарною відносно центру визначеного інтервалу

$$W_+^i\left(\frac{l_i + l_{i+1}}{2} - x\right) = -W_+^i\left(\frac{l_i + l_{i+1}}{2} + x\right), \tag{3.21}$$

ми одержимо суперпотенціали $W(x)$ і $W_1(x)$, які матимуть таку ж властивість та задовольнятимуть умову (3.21). Як наслідок ці суперпотенціали задовольнятимуть (3.4) і тому приводять до обмежених та визначених на всій дійсній осі власних функцій.

Для ілюстрації описаної методики наведемо кілька прикладів КТР випадкових потенціалів, які можна також перетворити у періодичні.

3.5 Тригонометричний випадковий потенціал із двома відомими станами

Розглянемо функцію $W_+(x)$, що має лише нулі

$$W_+(x) = W_+^i(x) = \frac{\alpha}{\beta_i}\sin(\beta_i(x-l_i)), \tag{3.22}$$

у якій $\alpha > 0$, а параметри β_i - випадкові. Тут і надалі у цьому прикладі для кожної i змінна x належить відповідному інтервалові (3.1)

$$l_{i+1} = l_i + \frac{2\pi}{\beta_i}, \qquad l_0 = 0. \tag{3.23}$$

Генеруюча функція (3.22) є неперервною, яка має нулі із додатними похідними у точках $x_k^+ = l_k$ та від'ємними похідними у точках $x_k^- = (l_k + l_{k+1})/2$. Із умови несингулярності потенціальної енергії випливає, що $\epsilon = W'(x_k^+)/2 = \alpha/2$. Використовуючи (2.20), одержимо для суперпотенціалів

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{1}{2}\Bigg(\frac{\alpha}{\beta_i}\sin\big(\beta_i(x-l_i)\big) + \beta_i \mathrm{tg}\big(\tfrac{\beta_i}{2}(x-l_i)\big)\Bigg), \\ W_1(x) &= \frac{1}{2}\Bigg(\frac{\alpha}{\beta_i}\sin\big(\beta_i(x-l_i)\big) - \beta_i \mathrm{tg}\big(\tfrac{\beta_i}{2}(x-l_i)\big)\Bigg). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Суперпотенціал $W(x)$ приводить до такого КТР потенціалу

$$16V_-(x) = \frac{\alpha(\alpha+4\beta_i^2)}{\beta_i^2} - 2\beta_i^2 - \frac{\alpha^2}{\beta_i^2}\cos\big(2\beta_i(x-l_i)\big) - 8\alpha\cos\big(\beta_i(x-l_i)\big). \tag{3.25}$$

Хвильові функції стану із нульовою енергією (2.8) та енергією $\epsilon = \alpha/2$ (2.15) є такими

$$\begin{aligned}
\psi_0^-(x) &= C_0^-(-1)^i \cos\Big(\tfrac{\beta_i}{2}(x-l_i)\Big)\exp\Big(-\tfrac{\alpha}{\beta_i^2}\sin^2\Big(\tfrac{\beta_i}{2}(x-l_i)\Big)\Big),\\
\psi_\epsilon^-(x) &= C_\epsilon^-(-1)^i \sin\Big(\tfrac{\beta_i}{2}(x-l_i)\Big)\exp\Big(-\tfrac{\alpha}{\beta_i^2}\sin^2\Big(\tfrac{\beta_i}{2}(x-l_i)\Big)\Big).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Множник $(-1)^i$ введений для виконання умови неперервності хвильової функції та її похідної.

Для випадку $\beta_i = 1$ одержуємо періодичну систему. Період $\psi_0^-(x)$ становить $2L = 4\pi$, і вона на інтервалі L має один вузол та задовольняє умову $\psi_0^-(x+2\pi) = -\psi_0^-(x)$. Хвильова функція $\psi_\epsilon^-(x)$ є також періодичною із періодом $2L = 4\pi$, має один вузол на проміжку L та задовольняє умову $\psi_\epsilon^-(x+2\pi) = -\psi_\epsilon^-(x)$. Хвильова функція $\psi_0^-(x)$ відповідає енергії E_1 верхнього краю першої зони, а хвильова функція $\psi_\epsilon^-(x)$ відповідає енергії $E_{1'}$ дна краю другої зони. Отже, ширина забороненої зони складає $E_{1'} - E_1 = \epsilon = \alpha/2$. Зазначимо, що цей періодичний випадок відтворює один із потенціалів, що вивчався у [38].

Звертаємо увагу, що хвильові функції, одержані у цьому прикладі, задовольняють умови, одержані у [114] у рамках суперсиметричної квантової механіки для забезпечення само-ізоспектральних властивостей суперсиметричних партнерів другого порядку. Із цієї точки зору гамільтоніан H_+, який ми використовуємо, є суперсиметричним партнером H_- першого порядку.

3.6 Невпорядкована модель Кроніга-Пенні із двома точними розв'язками

Розглянемо складніший приклад випадкової генеруючої функції $W_+(x)$, що має нулі та полюси. Простішою із таких функцій є

$$W_+(x) = W_+^i(x) = \frac{1}{\beta_i}\mathrm{tg}(\beta_i(x - l_i)), \tag{3.27}$$

у якій індексові i відповідає змінна x, визначена на відповідному інтервалі (3.1)

$$l_{i+1} = l_i + \frac{2\pi}{\beta_i}, \qquad l_0 = 0. \tag{3.28}$$

Ця генеруюча функція задовольняє умову (a), а саме

$$W^{'}(x_k^+ = l_k) = 1 = 2\epsilon. \tag{3.29}$$

Отже, енергія збудженого стану рівна $\epsilon = 1/2$. Для того, щоб задовольнити умови (b) і (c) 3.4, параметри β_i можуть набувати лише значень 1 та $1/\sqrt{3}$, і β_i визначається як

$$\beta_i = 1 - n_i + n_i\frac{1}{\sqrt{3}}, \tag{3.30}$$

де n_i випадкові параметри, які можуть набувати значень 0 або 1. Генеруючу функцію можна записати у такому вигляді

$$W_+(x) = (1 - n_i)\mathrm{tg}(x - l_i) + n_i\sqrt{3}\ \mathrm{tg}\left(\frac{(x - l_i)}{\sqrt{3}}\right). \tag{3.31}$$

Ця функція приводить до таких суперпотенціалів

$$\begin{aligned} W(x) &= n_i\tfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\left(\tfrac{(x-l_i)}{\sqrt{3}}\right), \\ W_1(x) &= (1 - n_i)\mathrm{tg}(x - l_i) + n_i\tfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\left(\tfrac{(x-l_i)}{\sqrt{3}}\right), \end{aligned} \tag{3.32}$$

і потенціальної енергії

$$V_-(x) = -\frac{n_i}{6}. \tag{3.33}$$

Зазначимо, що для кожного індексу i суперпотенціали та потенціальна енергія визначені на відповідному інтервалі (3.1). Отже, цей потенціал відповідає неупорядкованій моделі Кроніга-Пенні.

Для цього КТР потенціалу ми одержали хвильові функції, які відповідають нульовій енергії та енергії $\epsilon = 1/2$, відповідно,

$$\psi_0^-(x) = C_0^-(-1)^{\sum_{j=0}^{i-1} n_i}\left((1-n_i) + n_i \cos\left(\frac{(x-l_i)}{\sqrt{3}}\right)\right), \tag{3.34}$$

$$\psi_\epsilon^-(x) = C_\epsilon^-(-1)^{\sum_{j=0}^{i-1}(1-n_i)}\left((1-n_i)\sin(x-l_i) + n_i\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{2(x-l_i)}{\sqrt{3}}\right)\right), \tag{3.35}$$

де для кожного i змінній x відповідає інтервал (3.1). Множник виду $(-1)^{f(n_i)}$ забезпечує неперервність хвильових функцій та їх похідних, сталі C_0^- та $\tilde{C}_0^-$ - довільні сталі однакові для всіх інтервалів. Використовуючи формулу (3.12), можна відшукати іншу пару лінійно незалежних розв'язків $\tilde{\psi}_0^-(x)$ та $\tilde{\psi}_\epsilon^-(x)$ для заданих $\psi_0^-(x)$ та $\psi_\epsilon^-(x)$:

$$\tilde{\psi}_0^-(x) = \tilde{C}_i\left((1-n_i)(x+C_i) + n_i\left[C_i\cos\left(\frac{x-l_i}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{x-l_i}{\sqrt{3}}\right)\right]\right), \tag{3.36}$$

$$\tilde{\psi}_\epsilon^-(x) = \tilde{C}_i\left(-(1-n_i)\cos(x-l_i) + n_i\cos\left(\frac{2(x-l_i)}{\sqrt{3}}\right)\right), \tag{3.37}$$

у яких константи $\tilde{C}_i$ та C_i підбирають такими щоби забезпечити неперервність хвильової функції та її похідної у точках зшивання. Однак, розв'язок $\tilde{\psi}_0^-(x)$, будучи розв'язком рівняння Шредінґера, не має фізичного змісту, оскільки хвильова функція (3.36) є лінійною функцією від x, для інтервалів з $n_i = 0$, що призводить до розбігання її при x, що прямує до ∞ або $-\infty$. Отже, власний стан із нульовою енергією невироджений, а стан із енергією ϵ - двократно вироджений з хвильовими функціями (3.35) та (3.37).

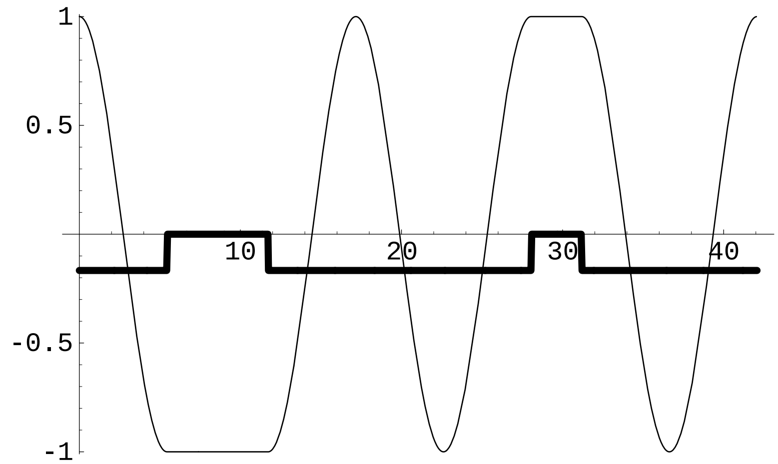

Рис. 3.2: Хвильова функція $\psi_0^-(x)$, яка відповідає власному станові моделі Кроніга-Пенні із нульовим рівнем енергії для $i = 0 \dots 8$, $n_i = \{1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1\}$. Жирною лінією наведено потенціал $V_-(x)$. Константа нормування C_0^- вибрана рівною одиниці.

Потенціал $V_-(x)$, хвильова функція $\psi_0^-(x)$ власного стану з нульовим значення енергії і хвильові функції $\psi_\epsilon^-(x)$ та $\tilde{\psi}_\epsilon^-(x)$ власного стану з енергією ϵ зображено на рис.3.2 та рис.3.3 відповідно.

Зауважимо, що при зміні випадкового параметра n_i змінюється лише величина $\Delta l_i = \sqrt{3}\pi/(n_i + \sqrt{3}(1 - n_i))$, яка може набувати значень $\Delta l_a = \pi$, $\Delta l_b = \sqrt{3}\pi$. Тому, ширина ями повинна бути кратною $\sqrt{3}\pi$, а відстань між ямами - кратною π. Ці співвідношення, які забезпечують існування делокалізованих станів, також є наслідком умови (3.4).

Підкреслимо, що і у цьому випадку можна, розставляючи n_i у певному порядку, наприклад, $n_1 = 0$, $n_2 = 1$, $n_3 = 0$, $n_4 = 1 \dots$, прийти до впорядкованої моделі.

3.7 Висновки до розділу 3

SUSY-метод конструювання КТР потенціалів запропонований у [35,37], узагальнено на випадок випадкових потенціалів. Показано, при

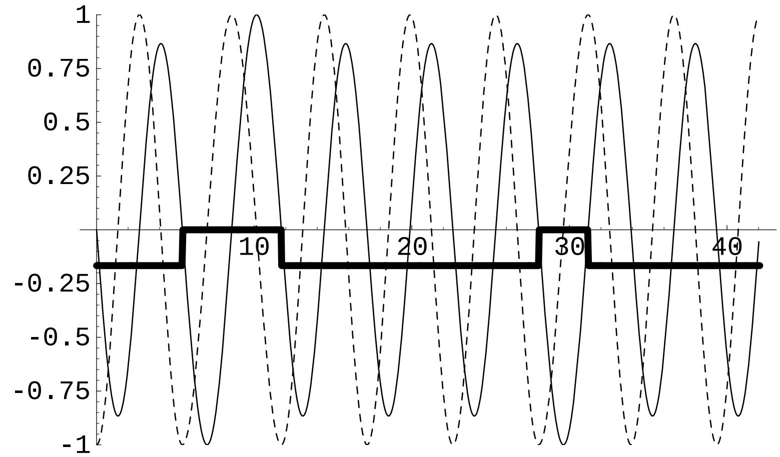

Рис. 3.3: Хвильові функції, які відповідають власному станові моделі Кроніга-Пенні із рівнем енергії ε для $i = 0 \dots 8$, $n_i = \{1,0,0,1,1,1,0,1,1\}$. Жирною лінією позначено потенціал $V_-(x)$, суцільна лінія відповідає $\psi_\varepsilon^-(x)$, пунктирна – $\tilde{\psi}_\varepsilon^-(x)$. Константи нормування C_ε^- та $\tilde{C}_\varepsilon^-$ вибрані рівними одиниці.

яких умовах потенціал даватиме два точних розв'язки, а хвильові функції описуватимуть делокалізовані стани.

Вибираючи різні випадкові генеруючі функції $W_+(x)$ одержано КТР випадкові потенціали $V_-(x)$, для яких знайдено два точні стани та відповідні енергії.

Наведено приклади випадкових КТР потенціалів, один із яких відповідає неупорядкованій моделі Кроніга-Пенні, для якої знайдено два точних розв'язки, що відповідають нульовій енергії та енергії, рівній ε. Зазначимо, стан із нульовою енергією не відноситься до основного стану, про що свідчить наявність вузлів хвильової функції.

Розглянуто умови, при яких випадковий суперпотенціал приводить до періодичної моделі Кроніга-Пенні. Для аналізу одержаних розв'язків рівняння Шредінґера із періодичним потенціалом можна застосувати осциляційну теорему, згідно із якою у випадку КТР потенціалу із одним відомим розв'язком одержаний розв'язок відповідає верхньому краю четвертої зони або нижньому краю п'ятої, якщо нумерація зон починається із одиниці. Для КТР потенціалів із двома розв'язками одержаний розв'язок $E = 0$ відповідає верхньому краю першої зони або нижньому краю другої, а розв'язок $E = \varepsilon$ – верхньому краю третьої зони або нижньому краю четвертої.

Результати цього розділу опубліковано у роботах [91, 92].

Розділ 4

Квазіточно розв'язувані потенціали для систем, маса яких залежить від координат. Основний і перший збуджений стани

4.1 Вступ

У цьому розділі ми будемо розглядати квазіточно розв'язувані системи із масою, залежною від координат, гамільтоніан яких в представленні фон Росса [66] має вигляд

$$H = \frac{1}{4}[m^\alpha p m^\beta p m^\gamma + m^\gamma p m^\beta p m^\alpha] + V(x), \tag{4.1}$$

де дійсні параметри α, β і γ задовольняють умову $\alpha + \beta + \gamma = -1$. Така форма гамільтоніана забезпечує ермітовість та правильну асимптотику гамільтоніана при переході до $m(x) = const$.

Проблемі одержання точних розв'язків для систем із масою, що залежить від координат, було присвячено ряд робіт [74–78, 87, 89, 127, 129, 130]. До знаходження точних розв'язків застосовувався також і метод суперсиметричної квантової механіки [74, 87].

Однак, кількість точно розв'язуваних задач є обмеженою. Тому цікавою і важливою залишається задача пошуку квазіточно розв'язуваних (КТР) потенціалів, для яких можна знайти точно кілька енергетичних рівнів і відповідних хвильових функцій [41, 43, 74, 79, 131, 137, 138]. Серед них - квазіточно розв'язувані потенціали із масою, залежною від координат [79, 131] та періодичні потенціали [41, 45, 47, 74]. Зазначимо, що хоча дослідження КТР потенціалів проводиться досить давно, до цього часу ця тематика залишається актуальною (див., наприклад, роботи [137, 138] та посилання у них).

Тому в цьому та наступному розділах буде детально розглянуто розширення суперсиметричного методу конструювання квазіточно розв'язуваних потенціалів на випадок систем з координатно залежною масою.

При вивченні систем із масою, залежною від координат, виникають важливі загальнофізичні проблеми, зокрема, проблема впорядкування некомутативних операторів координати та імпульсу у операторі кінетичної енергії, уточнення граничних умов при переході через поверхню, на якій потенціал та ефективна маса є розривними функціями, проблема галілеївської інваріантності систем із позиційно-залежною масою [67, 74, 123, 127, 128].

У цьому розділі ми отримаємо ефективний гамільтоніан моделі сильного зв'язку в наближенні повільної зміни інтеграла переходу, для якого проаналізуємо проблему упорядкування операторів координати та імпульсу в кінетичній енергії.

4.2 Гамільтоніан системи із масою, залежною від координат, у представленні фон Росса

Основною проблемою гамільтоніана частинки з масою, яка залежить від координат, є упорядкування маси та операторів імпульсу у операторі кінетичної енергії. Зупинимося на двопараметричній формі оператора кінетичної енергії Росса [66, 88], для якої оператор гамільтоніана має вигляд

$$H = -\frac{\hbar^2}{4}[m^{\delta'}(x)\nabla m^{\varkappa'}(x)\nabla m^{\lambda'}(x) + m^{\lambda'}(x)\nabla m^{\varkappa'}(x)\nabla m^{\delta'}(x)] + V(x), \tag{4.2}$$

де $V(x)$ - потенціал, $\delta', \varkappa', \lambda'$ - параметри, що задовольняють умову $\delta' + \varkappa' + \lambda' = -1$.

Подавши $m(x)$ як

$$\begin{aligned} m(x) &= m_0 M(x), \\ M(x) &= \tfrac{1}{f^2(x)}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

запишемо гамільтоніан у вигляді

$$H = -\frac{\hbar^2}{4m_0}[f^{\delta}(x)\nabla f^{\varkappa}(x)\nabla f^{\lambda}(x) + f^{\lambda}(x)\nabla f^{\varkappa}(x)\nabla f^{\delta}(x)] + V(x), \tag{4.4}$$

де на індекси $\delta,\ \varkappa,\ \lambda$ накладено умову $\delta + \varkappa + \lambda = 2$. У частковому випадку, коли $\delta' = \lambda' = 0, \varkappa' = 1$ або $\delta = \lambda = 0, \varkappa = 2$ гамільтоніан набуває вигляду [58]

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla f^2(x)\nabla + V(x). \tag{4.5}$$

Гамільтоніан (4.4) можна також переписати у вигляді

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\sqrt{f(x)}\nabla f(x)\nabla\sqrt{f(x)} + V_{eff}(x), \tag{4.6}$$

де $V_{eff}(x)$ - деякий ефективний потенціал.

Зазначимо, що функція $f(x)$ також може бути пов'язана із деформацією комутаційних співвідношень між координатою та деформованим оператором імпульсу $P_i = \sqrt{f(x)}p_i\ \sqrt{f(x)}$, а саме

$$[x_i, P_j] = i\hbar f(x)\ \delta_{ij}. \tag{4.7}$$

Якщо ж деформація відсутня, тобто

$$[x_i, p_j] = i\hbar\ \delta_{ij}, \tag{4.8}$$

то маса у операторі кінетичної енергії буде сталою величиною.

Гамільтоніан (4.6) можна також подати у вигляді

$$H = -\frac{P^2}{2m_0} + V(x), \tag{4.9}$$

де $P = -i\hbar\sqrt{f(x)}\ \nabla\ \sqrt{f(x)} = \sqrt{f(x)}\ p\sqrt{f(x)}$

Зазначимо, що оператор P повинен бути ермітовим, тобто задовольняти умову

$$\int \psi^* P\varphi\ dx = \left(\int \varphi^* P\psi dx\right)^*, \tag{4.10}$$

для функцій $\psi(x)$ і $\varphi(x)$. Підставивши у ліву частину останньої рівності вираз для оператора P, одержимо

$$\begin{array}{l} -i\int_{x_1}^{x_2}\psi^*(x)\sqrt{f(x)}\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)}\varphi(x)dx = \\ -i\left[\int_{x_1}^{x_2}\varphi^*(x)\sqrt{f(x)}\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)}\psi(x)dx\right]^*. \end{array} \tag{4.11}$$

Проінтегрувавши ліву частину цієї рівності частинами, одержимо

$$\begin{array}{l} -i\int_{x_1}^{x_2}\psi^*(x)\sqrt{f(x)}\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)}\varphi(x)dx = -if(x)\psi^*(x)\varphi(x)\Big|_{x_1}^{x_2} + \\ i\int_{x_1}^{x_2}\varphi^*(x)\sqrt{f(x)}\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)}\psi(x)dx. \end{array} \tag{4.12}$$

Поклавши у останній рівності $\varphi = \psi$ та порівнявши одержаний результат із правою частиною (4.10), прийдемо до умови, що накладається на хвильові функції та функції $f(x)$ для забезпечення ермітовості оператора P

$$\lim_{x\to\pm\infty} |\psi(x)|^2 f(x) \to 0. \tag{4.13}$$

4.3 Впорядкування операторів у гамільтоніані системи із масою, залежною від координат

Як вже було зазначено при розгляді систем маса яких залежить від координат виникає проблема упорядкування операторів імпульсу та маси як функції від координат. У роботі [95], виходячи із моделі сильного зв'язку та постулюючи повільну зміну інтеграла перескоку, ми одержали ефективний гамільтоніан, для якого проаналізували проблему упорядкування операторів в кінетичній енергії.

Розглянемо гамільтоніан у так званому вузловому представленні

$$H = \sum_i J_i(|i+1\rangle\langle i| + |i\rangle\langle i+1|) + \sum_i \epsilon_i |i\rangle\langle i|, \tag{4.14}$$

де $|i\rangle$ - вектор стану частинки на вузлі i, вектори стану на різних вузлах - ортогональні, J_i - так званий інтеграл переходу між сусідніми вузлами i та $i+1$, а ϵ_i - енергія на вузлі i.

Розглянемо рівняння Шредінґера

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle/ \tag{4.15}$$

Його розв'язки будемо шукати у вигляді

$$|\psi\rangle = \sum c_i |i\rangle, \tag{4.16}$$

де ϵ_i – коефіцієнти розкладу, для яких одержуємо рівняння

$$J_i c_{i+1} + J_{i-1} c_{i-1} + \epsilon_i c_i = E c_i. \tag{4.17}$$

Залежність c_i від координати i-го вузла запишемо як

$$c_i = \psi(x_i), \tag{4.18}$$

де x_i – координата i-го вузла, відстань між найближчими сусідами – a. Ми припустимо, що ψ змінюється мало на відстанях, що мають порядок міжвузлової відстані a. Тоді у другому порядку по a можна записати

$$\begin{array}{lllll} c_{i+1} & = & \psi(x_i + a) & = & \psi(x_i) + \psi'(x_i)a + \frac{1}{2}\psi''(x_i)a^2, \\ c_{i-1} & = & \psi(x_i - a) & = & \psi(x_i) - \psi'(x_i)a + \frac{1}{2}\psi''(x_i)a^2, \\ J_i & = & V(x_i + a) & = & J(x_i) + J'(x_i)a + \frac{1}{2}J''(x_i)a^2, \end{array} \tag{4.19}$$

де $\psi'(x) = d\psi(x)/dx$, $\psi''(x) = d^2\psi(x)/dx^2$, $J'(x) = dJ(x)/dx$, $J''(x) = d^2J(x)/dx^2$.

Підставляючи ці розклади у (4.17), отримаємо

$$\begin{aligned} &a^2\left(J(x)\psi''(x) + J'(x)\psi'(x) + \tfrac{1}{2}J''(x)\psi(x)\right) - aJ'(x)\psi(x) \\ &+2J(x)\psi(x) + \epsilon(x)\psi(x) = E\psi(x), \end{aligned} \tag{4.20}$$

де ми замість x_i написали x, вважаючи її неперервною змінною.

Це рівняння можна розглядати як рівняння Шредінґера із гамільтоніаном

$$H = a^2\left(J(x)\frac{d^2}{dx^2} + J'(x)\frac{d}{dx}\right) + \frac{1}{2}a^2J''(x) - aJ'(x) + 2J(x) + \epsilon(x). \tag{4.21}$$

Оскільки

$$\left(J(x)\frac{d^2}{dx^2} + J'(x)\frac{d}{dx}\right) = \frac{d}{dx}J(x)\frac{d}{dx}, \tag{4.22}$$

гамільтоніан (4.21) можна записати у явно ермітовому вигляді

$$H = a^2\frac{d}{dx}J(x)\frac{d}{dx} + \frac{a^2}{2}J''(x) - aJ'(x) + 2J(x) + \epsilon(x). \tag{4.23}$$

Перший доданок можна розглядати як кінетичну енергію, а наступні доданки – як потенціальну енергію. Використовуючи тотожність

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\left(J^\alpha(x)\tfrac{d}{dx}J^\beta(x)\tfrac{d}{dx}J^\gamma(x) + J^\gamma(x)\tfrac{d}{dx}J^\beta(x)\tfrac{d}{dx}J^\alpha(x)\right) = \\ &J(x)\tfrac{d^2}{dx^2} + J'(x)\tfrac{d}{dx} + \tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)J''(x) - \alpha\gamma\tfrac{(J'(x))^2}{J(x)} \end{aligned} \tag{4.24}$$

де $\alpha + \beta + \gamma = 1$, перепишемо гамільтоніан (4.21) у вигляді суми кінетичної і потенціальної енергії

$$H = T + U. \tag{4.25}$$

Тут операторами кінетичної і потенціальної енергії є

$$T = \frac{a^2}{2}\left(J^\alpha(x)\frac{d}{dx}J^\beta(x)\frac{d}{dx}J^\gamma(x) + J^\gamma(x)\frac{d}{dx}J^\beta(x)\frac{d}{dx}J^\alpha(x)\right) \tag{4.26}$$

$$U=\frac{a^2}{2}(1-\alpha-\gamma)J''(x)+a^2\alpha\gamma\frac{(J'(x))^2}{J(x)}-aJ'(x)+2J(x)+\epsilon(x) \quad (4.27)$$

відповідно.

Як видно, той самий гамільтоніан (4.23) можна записати у формі (4.25) із різним упорядкуванням у кінетичній енергії. Зміна упорядкування у (4.26) приводить до зміни потенціальної енергії (4.27) так що їх сума не залежить від упорядкування. Можна вибрати інше упорядкування і одержати той же гамільтоніан у іншому вигляді. Наприклад, для $\beta=1$, $\alpha=\gamma=0$ ми одержуємо гамільтоніан у формі (4.23), а для $\alpha=1$, $\gamma=\beta=0$ гамільтоніан (4.23) записується у вигляді

$$H=\frac{a^2}{2}\left(J(x)\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dx}J(x)\right)-aJ'(x)+2J(x)+\epsilon(x). \quad (4.28)$$

Зазначимо, що (4.26) не є найзагальнішою формою для кінетичної енергії з масою, залежною від координат. Ми пропонуємо загальнішу форму у такому вигляді:

$$T=\frac{a^2}{2}\left(J_1(x)\frac{d}{dx}J_2(x)\frac{d}{dx}J_3(x)+J_3(x)\frac{d}{dx}J_2(x)\frac{d}{dx}J_1(x)\right), \quad (4.29)$$

де три функції $J_1(x)$, $J_2(x)$, $J_3(x)$ задовольняють співвідношення $J_1(x)J_2(x)J_3(x)=J(x)$.

Зауважимо, що (4.29) можна записати у формі

$$\begin{aligned}T&=a^2\left(J(x)\tfrac{d^2}{dx^2}+J'(x)\tfrac{d}{dx}\right)+\\&+\tfrac{a^2}{2}\left[J_1(x)(J_2(x)J_3'(x))'+J_3(x)(J_2(x)J_1'(x))'\right]\end{aligned} \quad (4.30)$$

Порівнюючи отриманий вираз із (4.21), бачимо, що гамільтоніан (4.21) можна записати у вигляді суми кінетичної (4.29) і потенціальної енергії

$$\begin{aligned}U&=\tfrac{1}{2}a^2J''(x)-aJ'(x)+2J(x)+\epsilon(x)-\\&-\tfrac{a^2}{2}\left[J_1(x)(J_2(x)J_3'(x))'+J_3(x)(J_2(x)J_1'(x))'\right].\end{aligned} \quad (4.31)$$

Тому немає сенсу обговорення про упорядкування операторів у кінетичній енергії з масою залежною від координат без потенціальної енергії. Для розглянутої моделі гамільтоніаном (4.23) можна переписати у загальній формі (4.25) із довільним упорядкуванням у кінетичній енергії.

Отже, ми розглянули модель сильного зв'язку з інтегралом переходу, що повільно змінюється вздовж ланцюжка атомів. Ми отримали ефективний гамільтоніан, який містить кінетичну енергію з позиційно-залежною масою і ефективною потенціальною енергією. і прийшли до висновку, що зміна упорядкування в кінетичній енергії призводить до зміни ефективної потенціальної енергії, залишаючи гамільтоніан тим самим. Цей гамільтоніан можна записати в загальному вигляді як суму кінетичної енергії з довільним упорядкуванням маси та імпульсу і ефективної потенціальної енергії.

Таким чином, немає ніякого сенсу розглядати проблему упорядкування в кінетичній енергії, не враховуючи потенціальну енергію. Звертаємо увагу, що проблема неоднозначності впорядкування для ефективного гамільтоніана може бути вирішена, стартуючи з мікроскопічної моделі, яка не має жодної проблеми упорядкування. Як приклад, ми розглянули модель сильного зв'язку з інтегралом переходу, що повільно змінюється вздовж ланцюжка. Запропонований метод отримання ефективного гамільтоніана може бути застосований і до інших моделей.

Ми також запропонували загальнішу форму для кінетичної енергії з позиційно залежною масою, ніж запропонована фон Россом.

4.4 Суперсиметрична квантова механіка для систем, маса яких залежить від координат

Розглянемо для гамільтоніана (4.6) суперсиметричне представлення Віттена [3, 139], для чого введемо оператори

$$B^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\mp iP + W(x) \Big), \tag{4.32}$$

через які гамільтоніани суперсиметричних партнерів $H_{\pm}$ записують як

$$H_{\pm} = B^{\mp} B^{\pm} = \frac{1}{2}\Big(P^2 + V_{\pm}(x) \Big), \tag{4.33}$$

де $V_{\pm}(x) = W^2(x) \pm f\, W'(x)$ - потенціали суперсиметричних партнерів, $W(x)$ - суперпотенціал, $W'(x) = \frac{dW(x)}{dx}$ - похідна від суперпотенціалу за координатами.

Рівняння для енергетичного спектру суперсиметричних партнерів запишемо як

$$H_{\pm}\psi_n^{\pm}(x) = E_n^{\pm}\psi_n^{\pm}(x), n = 0, 1, 2.... \tag{4.34}$$

Енергетичні спектри суперсиметричних партнерів H_+ і H_- співпадають крім, можливо, лише стану із нульовою енергією. Нехай стан із нульовою енергією належить операторові H_-. Хвильова функція цього стану, внаслідок того, що гамільтоніан H_- представлено у факторизованому вигляді, задовольнятиме рівняння $B^-\psi_0^-(x) = 0$ та матиме вигляд

$$\psi_0^-(x) = \frac{C_0^-}{\sqrt{f(x)}} \exp\left(- \int \frac{W(x)}{f(x)}\, dx \right), \tag{4.35}$$

де C_0^- - константа нормування.

Для забезпечення виконання умови нормування хвильової функції суперпотенціал повинен задовольняти умову

$$\mathrm{sign}(W(\pm\infty)) = \pm 1. \tag{4.36}$$

4.5 Модель із одним точним розв'язком

Ми використаємо методику суперсиметричної квантової механіки з метою генерування квазіточно розв'язуваних (КТР) потенціалів для систем, маса яких залежить від координат. Як видно із (4.35), вибираючи різні суперпотенціали $W(x)$ та функції $f(x)$, можна знайти розв'язок для основного стану системи. Використавши визначення потенціалу (4.33)

$$V_{eff}(x) = V_{-}(x) = W^2(x) - f(x)\, W^{'}(x), \tag{4.37}$$

та розглядаючи $W(x)$ та $f(x)$ як генеруючі функції для потенціалу $V(x)$, можемо знайти серед них таку пару функцій для, яких існуватиме точна власна функція для основного стану системи.

Приклад 4.1.. Нехай

$$W(x) = \alpha x^{2n+1}, (n = 0, 1, ...), \tag{4.38}$$

а

$$f(x) = (a + bx^{2n+2})^k, \tag{4.39}$$

де $a, b > 0$.

У цьому випадку потенціал, для якого існує точний розв'язок для основного стану, має вигляд

$$V(x) = \alpha^2 x^{2(2n+1)} - \alpha(2n+1)x^{2n}(a + bx^{2n+2})^k, \tag{4.40}$$

Хвильова функція для стану із нульовою енергією при $b \neq 0$ є такою

$$\psi_0(x) = \frac{C_0}{(a + bx^{2n+2})^{\frac{k}{2}}} \cdot \exp\left(- \frac{\alpha}{b(2n+2)(1-k)}(a + bx^{2n+2})^{1-k} \right), \tag{4.41}$$

а при $b = 0$ вона має вигляд

$$\psi_0(x) = C_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{a^k(2n+2)} x^{2n+2} \right). \tag{4.42}$$

Із наведених виразів видно, що зв'язані стани існують при $\alpha > 0$, цілих n та $k < 1$. При $k = 1$ також існують зв'язані стани, які описуються хвильовою функцією

$$\psi_0(x) = C_0 \cdot (a + bx^{2n+2})^{-(\frac{\alpha}{b(2n+2)} + \frac{1}{2})}. \tag{4.43}$$

При $k > 1$ зв'язаних станів не існуватиме, тому що у цьому випадку не виконується умова ермітовості оператора P.

Зазначимо, що зв'язані стани існують як при від'ємних k, коли функція $f(x)$ на нескінченності прямує до нуля ($m(x) \to \infty$), досягаючи максимального значення у точці $x = 0$, так і при додатних k, коли вона на нескінченності прямує до безмежності ($m(x) \to 0$), досягаючи у точці $x = 0$ мінімального значення.

Наведемо також відповідні вирази для $V(x)$ і $\psi_0(x)$ при $n = 0$

$$V(x) = \alpha^2 x^2 - \alpha(a + bx^2)^k, \tag{4.44}$$

і

$$\psi_0(x) = \frac{C_0}{(a + bx^2)^{k/2}} \exp\left(\frac{\alpha}{2b(k-1)} (a + bx^2)^{1-k} \right). \tag{4.45}$$

та при $n = 1$

$$V(x) = \alpha^2 x^6 - 3\alpha x^2 (a + bx^4)^k, \tag{4.46}$$

і

$$\psi_0(x) = \frac{C_0}{(a + bx^4)^{k/2}} \exp\left(\frac{\alpha}{4b(k-1)} (a + bx^4)^{1-k} \right). \tag{4.47}$$

Зауважимо, що при зміні генеруючих функцій $f(x)$ і $V(x)$ змінюються одночасно і маса $m(x)$ і потенціал $V(x)$. Цікаво прослідкувати як впливають різні залежності маси від координат на основний стан при одному і тому ж самому потенціалі. Для цього слід перейти до нових генеруючих функцій, а саме $W(x)$ і $V(x)$. Це легко зробити знайшовши $f(x)$ із виразу для потенціалу

$$f(x) = \frac{W^2(x) - V(x)}{W'(x)}. \tag{4.48}$$

У цьому випадку вибравши певного виду потенціал $V(x)$ та змінюючи $W(x)$, одержимо різні функції $f(x)$, що забезпечать відшукання точного розв'язку для основного стану системи.

Приклад 4.2. Виберемо суперпотенціал $W(x)$ у такому вигляді

$$W(x) = \alpha\varphi(x), \tag{4.49}$$

а потенціал $V(x)$ таким

$$V(x) = k\varphi^2(x) + V_0. \tag{4.50}$$

Тепер, зафіксувавши параметри потенціалу k і V_0 та змінюючи параметр суперпотенціалу α, ми зможемо одержати різні залежності маси від координат. У цьому випадку

$$f(x) = \frac{(\alpha^2 - k)\varphi^2(x) - V_0}{\alpha\varphi'(x)}, \tag{4.51}$$

а хвильова функція має вигляд

$$\psi_0(x) = C_0 \frac{\sqrt{\varphi'(x)}}{\left((\alpha^2 - k)\varphi^2(x) - V_0\right)^{\frac{2\alpha^2 - k}{2(\alpha^2 - k)}}}. \tag{4.52}$$

Для забезпечення існування зв'язаних станів виберемо V_0 від'ємною величиною, тобто приймемо, що $V_0 = -|V_0|$.

Умови ермітовості оператора P

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{|C_0|}{(\alpha^2 - k)\varphi^2(x) + |V_0|} = 0 \tag{4.53}$$

та квадратичної інтегровності хвильової функції задовольняються при

$$\lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = \pm\infty. \tag{4.54}$$

Для $\varphi(x) = x$

$$V(x) = kx^2 - V_0, \tag{4.55}$$

і

$$f(x) = (\alpha^2 - k)x^2 + V_0. \tag{4.56}$$

Для цього випадку хвильова функція стану із нульовою енергією має вигляд

$$\psi_0(x) = C_0\Big((\alpha^2 - k)x^2 + V_0\Big)^{-\frac{2\alpha^2-k}{2(\alpha^2-k)}} \tag{4.57}$$

і при умові $\alpha^2 > k$ описує локалізовані стани.

Для $\varphi(x) = \mathrm{sh}(x)$

$$V(x) = k\mathrm{sh}^2(x) - V_0, \tag{4.58}$$

а

$$f(x) = \frac{(\alpha^2 - k)\mathrm{sh}^2(x) + V_0}{\alpha\mathrm{ch}(x)}, \tag{4.59}$$

Хвильова функція основного стану є такою

$$\psi_0(x) = C_0\frac{\sqrt{\alpha\mathrm{ch}(x)}}{\Big((\alpha^2 - k)\mathrm{sh}^2(x) + V_0\Big)^{\frac{2\alpha^2-k}{2(\alpha^2-k)}}}. \tag{4.60}$$

і при $\alpha^2 > k$ описує локалізовані стани.

Якщо ж $\varphi(x) = \mathrm{th}(x)$, то

$$V(x) = k\mathrm{th}(x) - V_0, \tag{4.61}$$

а

$$f(x) = \frac{\mathrm{ch}^2(x)}{\alpha}((\alpha^2 - k)\mathrm{th}^2(x) + V_0), \tag{4.62}$$

Тоді хвильова функція, що описує стан із нульовою енергією, має вигляд

$$\psi_0(x) = \frac{C_0}{\mathrm{ch}(x)}\Big((\alpha^2 - k)\mathrm{th}^2(x) + V_0\Big)^{-\frac{2\alpha^2-k}{2(\alpha^2-k)}}. \tag{4.63}$$

Аналіз виразу для хвильової функції показує, що виконання умови $k > \alpha^2$ недостатньо для існування зв'язаних станів, оскільки умова ермітовості оператора P виконується лише при певному співвідношенні між постійними α, k і V_0, а саме, коли $V_0/(k-\alpha^2) = 1$.

Приклад 4.3. Цікаво розглянути питання про існування зв'язаних станів у полі із постійним потенціалом для частинки, маса якої залежить від координат. Використавши визначення потенціалу (4.33) та прийнявши його постійною величиною рівною V_0, одержимо

$$f(x) = \frac{W^2(x) - V_0}{W'(x)}, \tag{4.64}$$

у якому із вимоги, щоби $f(x)$ не перетворювалася у нуль та не ставала від'ємною, виберемо $V_0 < 0$, тобто $V_0 = -|V_0|$ та $W'(x) > 0$.

Підставляючи знайдену функцію $f(x)$ у вираз для хвильової функції основного стану (4.35), отримаємо

$$\psi_0(x) = C_0 \frac{\sqrt{W'(x)}}{W^2(x) + |V_0|}. \tag{4.65}$$

Умова ермітовості оператора P для цього випадку набуває вигляду

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{|C_0|}{W^2(x) + |V_0|} = 0, \tag{4.66}$$

та задовольняється, коли

$$\lim_{x\to\pm\infty} W(x) = \pm\infty. \tag{4.67}$$

Умова квадратичної інтегровності хвильової функції така:

$$\begin{aligned} \int |\psi_0(x)|^2 dx &= |C_0|^2 \int \frac{W' dx}{(W^2(x)+|V_0|)^2} \\ &= |C_0|^2 \int \frac{dW}{(W^2(x)+|V_0|)^2} = \frac{\pi}{|V_0|^{3/2}}, \end{aligned} \tag{4.68}$$

звідки $C_0 = |V_0|^{3/4}/\sqrt{\pi}$.

Розглянемо приклад виникнення зв'язаних станів у полі з постійним потенціалом та масою, що є функцією від координат. Виберемо суперпотенціал $W(x)$, у такому вигляді

$$W(x) = \mathrm{sh}(x). \tag{4.69}$$

Функція $f(x)$, що описує залежність маси від координат при русі у полі із сталим потенціалом $-|V_0|$, у цьому випадку має вигляд

$$f(x) = \frac{\mathrm{sh}^2(x) + |V_0|}{\mathrm{ch}(x)}. \tag{4.70}$$

Відповідна хвильова функція є локалізованою у точці $x = 0$ і є такою

$$\psi_0(x) = C_0 \frac{\sqrt{\mathrm{ch}(x)}}{\mathrm{sh}^2(x) + |V_0|}. \tag{4.71}$$

Зазначимо, що зв'язаний стан, який описується хвильовою функцією $\psi_0(x)$, існує при як завгодно малому від'ємному потенціалі.

Інший приклад руху частинки з масою, що є функцією від координат у полі з постійним потенціалом, розглянемо у наступному підрозділі.

4.6 Квазіточно розв'язувані задачі із двома рівнями

Для одержання ще одного власного стану оператора H_-, врахуємо, що власні значення та власні функції гамільтоніанів H_+ і H_- пов'язані суперсиметричними перетвореннями

$$E^-_{n+1} = E^+_n, E^-_0 = 0, \tag{4.72}$$

$$\psi^-_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{E^+_n}} B^+ \psi^+_n(x), \tag{4.73}$$

$$\psi^+_n(x) = \frac{1}{\sqrt{E^-_{n+1}}} B^- \psi^-_{n+1}(x). \tag{4.74}$$

Розглянувши гамільтоніан H_+, який є суперсиметричним партнером оператора H_-, та знайшовши його основний стан, ми тим самим одержимо перший збуджений стан оператора H_-. Використовуючи суперсиметричні перетворення (4.72), запишемо H_+ у такому вигляді

$$H_+ = H_-^1 + \epsilon = B_1^+ B_1^- + \epsilon, \epsilon > 0, \tag{4.75}$$

що приводить до співвідношення між потенціалами суперсиметричних партнерів

$$V_+(x) = V_-^{(1)}(x) + \epsilon, \tag{4.76}$$

де $B_1^{\pm}$ та $V_-^{(1)}$ задані виразами (4.32) та (4.33) із новим суперпотенціалом $W_1(x)$, а ϵ є енергією основного стану гамільтоніана H_+, тоді як енергія основного стану H_- є нульовою.

Суперпотенціали $W(x)$ та $W_1(x)$ задовольняють рівняння

$$W_0^2(x) + \ f(x)\ W_0^{'}(x) = W_1^2(x) - f(x) W_1^{'}(x) + 2\varepsilon. \tag{4.77}$$

Хвильову функцію оператора H_+ із енергією $E = \epsilon$ знайдемо із рівняння $B_1^-(x)\psi_1^+(x) = 0$, розв'язком якого є

$$\psi_1^+(x) = \frac{C_1^+}{\sqrt{f(x)}} \exp\Bigg(- \int \frac{W_1(x)}{f(x)} dx \Bigg). \tag{4.78}$$

Застосовуючи суперсиметричні перетворення (4.73) до $\psi_1^+(x)$ одержимо хвильову функцію збудженого стану з енергією $E = \epsilon$ гамільтоніана H_-

$$\psi_1^-(x) = \frac{C_1^-}{\sqrt{f(x)}}\ W_+(x) \exp\Bigg(- \int \frac{W_1(x)}{f(x)} dx \Bigg). \tag{4.79}$$

де $W_+(x) = W_1(x) + W(x)$.

З рівняння(4.77) не вдається знайти ні $W(x)$, ні $W_1(x)$, але можна знайти таку пару величин $W(x)$ і $W_1(x)$, які задовольнятимуть це рівняння. Для цього введемо дві нових величини

$$\begin{aligned} W_+(x) &= W_1(x) + W(x), \\ W_-(x) &= W_1(x) - W(x), \end{aligned} \tag{4.80}$$

через які рівняння (4.77) записується як

$$f(x)\ W_+'(x) = W_+(x)\ W_-(x) + 2\epsilon. \tag{4.81}$$

Це нове рівняння можна розв'язати як відносно $W_-(x)$ для заданого $W_+(x)$ так і навпаки. Ми виражатимемо розв'язок через $W_+(x)$. Тоді

$$W_-(x) = \frac{f(x)\ W_+{}'(x) - 2\epsilon}{W_+(x)}, \tag{4.82}$$

де

$$\begin{aligned} W(x) &= \tfrac{1}{2}\left(W_+(x) - \tfrac{f(x)\ W_+'(x) - 2\epsilon}{W_+(x)}\right), \\ W_1(x) &= \tfrac{1}{2}\left(W_+(x) + \tfrac{f(x)\ W_+'(x) - 2\epsilon}{W_+(x)}\right). \end{aligned} \tag{4.83}$$

Вимога несингулярності потенціалу $V_-(x)$ накладає обмеження на генеруючу функцію $W_+(x)$. Розглянемо випадок, коли $W_+(x)$ має прості нулі у точці x_0, тобто у околі точки нуля поведінка $W_+(x)$ є такою

$$W_+(x) = W_+'(x_0)\ (x - x_0) + \frac{1}{2} W_+''(x_0)\ (x - x_0)^2. \tag{4.84}$$

Несингулярність $V_-(x)$ можна забезпечити несингулярністю $W_-(x)$, що приводить значення енергії збудженого рівня

$$\epsilon = \frac{f(x_0)\ W_+'(x_0)}{2}. \tag{4.85}$$

Розглянемо приклади точних розв'язків для основного та першого збудженого станів для деяких генеруючих функцій та функцій, що описують залежність маси від координат. Почнемо із випадків, для яких залежність від координат як генеруючої функції, так і маси частинки є степеневими функціями.

Приклад 4.4. Виберемо генеруючою функцію

$$W_+(x) = A\,x, A > 0, \tag{4.86}$$

яка має нулі у точці $x_0 = 0$, а функцією $f(x)$ - квадратичну функцію координат

$$f(x) = a + bx^2, a, b > 0. \tag{4.87}$$

У цьому випадку

$$\epsilon = \frac{aA}{2}, \tag{4.88}$$

а

$$W_-(x) = bx. \tag{4.89}$$

Суперпотенціали $W(x)$ та $W_1(x)$ набувають вигляду

$$\begin{array}{rcl} W(x) & = & \frac{A-b}{2}x, \\ W_1(x) & = & \frac{A+b}{2}x, \end{array} \tag{4.90}$$

а хвильові функції мають вигляд

$$\begin{array}{rcl} \psi_0(x) & = & C_0(a+bx^2)^{-[\frac{A-b}{4b}+\frac{1}{2}]}, \\ \psi_1(x) & = & C_1 x(a+bx^2)^{-[\frac{A+b}{4b}+\frac{1}{2}]}. \end{array} \tag{4.91}$$

З умови правильної поведінки W(x) випливає умова $A > b$. Потенціал $V_-(x)$ для цього випадку є таким

$$V_-(x) = \left(\frac{A^2}{4} - Ab + \frac{3}{4}b^2\right)x^2 - \frac{(A-b)a}{2}. \tag{4.92}$$

При умові, що $A = b$ або $A = 3b$ потенціал набуває сталого значення $V_-(x) = -(A-b)a/2$. При $A = b$ суперпотенціал $W(x) = 0$, що приводить до хвильових функцій, які не задовольняють умову ермітовості, а тому не приводять до локалізованих станів.

У другому випадку ($A = 3b$) $V_-(x) = -ba$ суперпотенціали набувають вигляду

$$\begin{array}{rcl} W(x) & = & bx, \\ W_1(x) & = & 2bx, \end{array} \tag{4.93}$$

а відповідні хвильові функції

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= \tfrac{C_0}{a+bx^2}, \\ \psi_1(x) &= \tfrac{C_1 x}{(a+bx^2)^{3/2}}, \end{aligned} \tag{4.94}$$

описують локалізовані стани при будь-яких додатних a і b. Маса $m(x) = m_0/f^2(x)$ при цьому у точці $x_0 = 0$ досягає максимального значення.

Приклад 4.5. Інший приклад з тією ж генеруючою функцією $W_+(x) = Ax$, коли функція $f(x)$ має вигляд

$$f(x) = \frac{B}{a+bx^2}. \tag{4.95}$$

дає для енергії першого збудженого рівня вираз

$$\epsilon = \frac{AB}{2a}. \tag{4.96}$$

Суперпотенціали задачі у цьому випадку є такими

$$\begin{aligned} W(x) &= \tfrac{Abx^3+(Aa+\frac{Bb}{a})x}{2(a+bx^2)}, \\ W_1(x) &= \tfrac{Abx^3+(Aa-\frac{Bb}{a})x}{2(a+bx^2)}, \end{aligned} \tag{4.97}$$

Потенціал $V_-(x)$, у полі якого рухається частинка із масою,що є функцією від координат, є таким

$$\begin{aligned} V_-(x) &= \tfrac{A^2b^2}{4}\tfrac{x^6}{(a+b^2)^2} + \tfrac{A^2ab+\frac{ABb^2}{a}}{2}\tfrac{x^4}{(a+bx^2)^2} + ABb^2\tfrac{x^4}{(a+bx^2)^3} + \\ &+ \tfrac{(Aa+\frac{Bb}{a})^2}{4}\tfrac{x^2}{(a+bx^2)^2} - \tfrac{3ABb}{2}\tfrac{x^2}{(a+bx^2)^2} + \\ &+ (ABab+\tfrac{B^2b^2}{a})\tfrac{x^2}{(a+bx^2)^3} - \tfrac{(Aa+\frac{Bb}{a})B}{2}\tfrac{1}{(a+bx^2)^2}. \end{aligned} \tag{4.98}$$

Хвильова функція основного стану із нульовою енергією має вигляд

$$\psi_0(x) = C_0\sqrt{a+bx^2}\ \exp\Big(-\frac{Ab}{8B}x^4 - \frac{Aa+\frac{Bb}{a}}{4B}x^2\Big). \tag{4.99}$$

Вона при співвідношенні між постійними $A > 0$, $B > 0$, $a > 0$, $b > 0$, що задовольняють умову

$$\frac{b}{a} < \frac{Aa+\frac{Bb}{a}}{2B} \tag{4.100}$$

має максимум при $x = 0$. Якщо ж

$$\frac{b}{a} > \frac{Aa + \frac{Bb}{a}}{2B}, \tag{4.101}$$

то $\psi_0(x)$ має двопікову структуру симетричну відносно точки $x = 0$.

Хвильова функція першого збудженого стану із енергією $\epsilon = AB/2a$

$$\psi_1(x) = C_1 x\sqrt{a + bx^2}\ \exp\left(-\frac{Ab}{8B}x^4 - \frac{Aa - \frac{Bb}{a}}{4B}x^2 \right). \tag{4.102}$$

має вузол у початку координат.

Розглянемо також приклади, у яких як $W_+(x)$ так і $f(x)$ виражаються через гіперболічні функції.

Приклад 4.6. Розглянемо генеруючу функцію

$$W_+(x) = A\mathrm{sh}(\alpha x), \tag{4.103}$$

а залежність функції $f(x)$, пов'язаної із залежністю маси від координат описується виразом

$$f(x) = \frac{B}{\mathrm{ch}(\beta x)}. \tag{4.104}$$

Генеруюча функція має нулі у точці $x_0 = 0$, що приводить до такого значення енергії першого збудженого стану

$$\epsilon = \frac{AB}{2}\ \alpha, \tag{4.105}$$

а суперпотенціали мають вигляд

$$\begin{aligned} W(x) &= \tfrac{A}{2}\ \mathrm{sh}(\alpha x) + \tfrac{B\alpha}{2\mathrm{sh}(\alpha x)}\big(\tfrac{\mathrm{coth}(\alpha x)}{\mathrm{ch}(\beta x)} - 1\big), \\ W_1(x) &= \tfrac{A}{2}\ \mathrm{sh}(\alpha x) - \tfrac{B\alpha}{2\mathrm{sh}(\alpha x)}\big(\tfrac{\mathrm{coth}(\alpha x)}{cosh(\beta x)} - 1\big). \end{aligned} \tag{4.106}$$

Для спрощення розрахунків розглянемо два частинних випадки, коли $\alpha = \beta$ і коли $\alpha = 2\beta$.

У першому випадку $\alpha = \beta$ суперпотенціали набувають вигляду

$$W(x) = W_1(x) = \frac{A}{2}\ \mathrm{sh}(\alpha x), \tag{4.107}$$

характер потенціалу $V_-(x)$ визначається виразом

$$V_-(x) = \frac{A^2}{4}\,\mathrm{sh}^2(\alpha x) - \frac{AB}{2}\alpha, \qquad (4.108)$$

а хвильова функція стану із нульовою енергією є такою

$$\psi_0(x) = C_0\sqrt{\mathrm{ch}(\alpha x)}\exp\left(-\frac{A}{4B\alpha}\mathrm{ch}^2(\alpha x)\right). \qquad (4.109)$$

Хвильова функція стану із енергією $\epsilon = \frac{AB}{2}\alpha$ для першого збудженого стану має у точці $x = 0$ вузол

$$\psi_1(x) = C_1\mathrm{sh}(\alpha x)\ \sqrt{\mathrm{ch}(\alpha x)}\exp\left(-\frac{A}{4B\alpha}\mathrm{ch}^2(\alpha x)\right). \qquad (4.110)$$

Зазначимо, що локалізовані стани у цій задачі існують при додатних сталих A, B та α.

У другому випадку $\alpha = 2\beta$ суперпотенціали $W(x)$ і $W_1(x)$ є такими

$$\begin{array}{rcl} W(x) &=& A\mathrm{sh}(\beta x)\mathrm{ch}(\beta x) - B\beta\,\frac{\mathrm{ch}(\beta x)-1}{\mathrm{sh}(\beta x)\mathrm{ch}(\beta x)} + \frac{B\beta}{2}\frac{1}{\mathrm{sh}(\beta x)\mathrm{ch}(\beta x)}, \\ W_1(x) &=& A\,\mathrm{sh}(\beta x)\mathrm{ch}(\beta x) + B\beta\,\frac{\mathrm{ch}(\beta x)-1}{\mathrm{sh}(\beta x)\mathrm{ch}(\beta x)} - \frac{B\beta}{2}\frac{1}{\mathrm{sh}(\beta x)\mathrm{ch}(\beta x)}. \end{array} \qquad (4.111)$$

Хвильова функція стану із нульовою енергією має вигляд

$$\psi_0(x) = C_0\mathrm{ch}(\beta x)\sqrt{2(\mathrm{ch}(\alpha x)+1)}\exp\left(-\frac{A}{3B\beta}\mathrm{ch}^3(\beta x)\right), \qquad (4.112)$$

а хвильова функція стану із енергією $\epsilon = AB\ \beta$ є такою

$$\psi_1(x) = C_1\mathrm{ch}^2(\beta x)\mathrm{sh}(\beta x)\sqrt{2(\mathrm{ch}(\alpha x)+1)}\exp\left(-\frac{A}{3B\beta}\mathrm{ch}^3(\beta x)\right). \qquad (4.113)$$

Із аналізу виразів для хвильових функцій випливає, що локалізовані стани існують при довільних додатних постійних A і B.

Приклад 4.7. У цьому прикладі розглянемо умови, при яких виникають локалізовані стани з такою ж, як у попередньому прикладі залежністю маси від координат, але іншою функцією $W_+(x)$. Отже

$$f(x) = \frac{B}{\mathrm{ch}\ x}, \qquad (4.114)$$

а

$$W_+(x) = A\text{th } x. \tag{4.115}$$

Функція $W_+(x)$ має нуль у точці $x = 0$, основний стан системи із нульовою енергією, а перший збуджений - відповідає енергії

$$\epsilon = \frac{AB}{2}. \tag{4.116}$$

Суперпотенціали $W(x)$ і $W_1(x)$ для функцій (4.114) і (4.115) є такими

$$\begin{aligned} W(x) &= \tfrac{A}{2}\text{th } x - \tfrac{B}{2}\,\tfrac{1-\text{ch}^3\ x}{\text{sh}x\ \text{ch}^2 x}, \\ W_1(x) &= A\tfrac{A}{2}\text{th } x + \tfrac{B}{2}\,\tfrac{1-\text{ch}^3\ x}{\text{sh}x\text{ch}^2 x}. \end{aligned} \tag{4.117}$$

Хвильова функція основного стану

$$\psi_0(x) = \frac{C_0}{\sqrt{B}}\ \sqrt{\text{ch } x + 1}\,\text{exp}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{A}{B} + 1\right)\text{ch}x\right), \tag{4.118}$$

описує локалізовані стани при додатних сталих A та B. Хвильова функція першого збудженого стану, енергія якого дорівнює $\epsilon = AB/2$, має вузол при $x = 0$

$$\psi_1 x) = \frac{C_1 A}{\sqrt{B}}\ \frac{\text{sh } x}{\sqrt{\text{ch } x + 1}}\ \text{exp}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{A}{B} - 1\right)\text{ch } x\right) \tag{4.119}$$

і при додатних A та B й додатковій умові $A > B$ також описує локалізовані стани.

4.7 Висновки до розділу 4

Суперсиметричний метод конструювання КТР потенціалів узагальнено на випадок, коли маса частинки є функцією від координат. Для випадку із одним відомим розв'язком розглянуто умови, при яких у полі із постійним потенціалом існують зв'язані стани. Для випадку із двома відомими станами одержано загальні вирази для суперпотенціалів і хвильових функцій основного та першого збудженого станів.

Вибираючи різні генеруючі функції та залежності маси від координат, одержано КТР потенціали із степеневою залежністю від координат та КТР потенціали, які виражаються через гіперболічні функції.

Розглянуто частковий випадок, який описує рух частинки з масою, залежною від координат, у полі із постійним потенціалом. Встановлено умови існування локалізованих станів у цьому випадку. Один із знайдених потенціалів відноситься до вже відомих точно розв'язуваних потенціалів, а інші одержані вперше.

Результати цього розділу опубліковано у роботі [94].

Розділ 5

Квазіточно розв’язувані потенціали з двома довільними власними станами для систем із масою, залежною від координат

5.1 Вступ

У попередньому розділі ми розглянули несингулярні КТР потенціали $V_{-}(x)$, для генерування яких використовували несингулярні суперпотенціали $W(x)$ і генеруючі функції $W_{+}(x)$. У цьому розділі несингулярний потенціал $V_{-}(x)$, як вперше показано у роботі [90], буде одержано, використовуючи сингулярні суперпотенціали $W(x)$ та генеруючі функції $W_{+}(x)$ і знайдено несингулярні періодичні КТР потенціали для несингулярних та сингулярних періодичних суперпотенціалів та(або) генеруючих функцій. При цьому ми знайдемо квазіточні розв’язки, які не обов’язково відповідають основному і першому збудженому станам, а двом довільним станам. З цією метою ми використаємо вирази (4.37) для потенціалу, (4.35) для хвильової функції стану із нульовою енергією та (4.79) для хвильової функції стану із енергією ε.

5.2 Квазіточно розв'язувані потенціали з двома довільними власними станами для систем із масою, залежною від координат

Метод суперсиметричної квантової механіки ми спочатку застосуємо для генерування квазіточно розв'язуваних (КТР) потенціалів, у полі яких перебуває частинка, маса якої залежить від координат. Як видно із (4.35), вибираючи різні суперпотенціали $W(x)$ та функції $f(x)$ можна знайти розв'язок для основного стану системи. Ми розглянемо несингулярні потенціали, які у найпростішому випадку можна одержати, використовуючи несингулярний суперпотенціал $W(x)$. Як показано у роботах [37, 90, 99], несингулярний потенціал можна також одержати, використовуючи сингулярний суперпотенціал. Спочатку розглянемо випадок коли $W(x)$ має прості полюси у точках x_k^p із такою поведінкою у їх околі

$$W(x) = \frac{A_{-1}}{x - x_k^p} + A_0 + A_1(x - x_k^p) + O((x - x_k^p)^2). \tag{5.1}$$

Розклавши у околі точки x_k^p функцію $f(x)$ у ряд з точністю до квадратичних вкладів, одержимо потенціал $V_-(x)$

$$\begin{aligned} V_-(x) \;&=\; \tfrac{A_{-1}^2 + f(x_k^p)A_{-1}}{(x-x_k^p)^2} + \tfrac{2A_0A_{-1} + f'(x_k^p)A_{-1}}{x-x_k^p} + A_0^2 + 2A_1A_{-1} - \\ &\quad - f(x_k^p)A_1 + \tfrac{1}{2}A_{-1}f''(x_k^p) + O(x - x_k^p). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Потенціал $V_-(x)$ буде несингулярним у двох випадках:

а) Якщо

$$A_{-1} = 0. \tag{5.3}$$

У цьому випадку несингулярним буде як потенціал $V_-(x)$, так і суперпотенціал $W(x)$

$$\begin{aligned} V_-(x) \;&=\; A_0^2 - A_1 f(x_k^p) + 2A_1A_{-1} + \tfrac{1}{2}A_{-1}f''(x_k^p) + O(x - x_k^p), \\ W(x) \;&=\; A_0 + A_1(x - x_k^p) + O((x - x_k^p)^2). \end{aligned} \tag{5.4}$$

b) Якщо ж

$$A_{-1} = -f(x_k^p), \tag{5.5}$$

$$A_0 = \frac{1}{2} f^{'}(x_k^p), \tag{5.6}$$

то $V_{-}(x)$ набуває скінченого значення в точках сингулярності $W(x)$, а саме

$$\begin{array}{rcl} V_{-}(x) & = & \frac{1}{4}\Big(f^{'}(x_k^p)\Big)^2 - 3A_1 f(x_k^p) + \frac{1}{2} f(x_k^p) f^{''}(x_k^p) + O(x - x_k^p), \\ W(x) & = & -\frac{f(x_k^p)}{(x - x_k^p)} - \frac{1}{2} f^{'}(x_k^p) + A_1(x - x_k^p) + O((x - x_k^p)^2). \end{array} \tag{5.7}$$

Зазначимо, що потенціальна енергія суперсиметричного партнера у цьому випадку буде сингулярною.

Підставляючи знайдені суперпотенціали у (4.35), знайдемо, що за умови (5.3), хвильова функція є аналітичною функцією і у околі точки x_k^p матиме таку поведінку

$$\psi_0(x) \sim (x - x_k^p), \tag{5.8}$$

де x_k^p є нулями хвильової функції.

У випадку b) при $A_{-1} = -f(x_k^p)$ і $A_0 = \frac{1}{2} f'(x_k^p)$ поведінка хвильової функції у околі особливих точок буде такою

$$\psi_0(x) \sim |x - x_k^p| \left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{A_1}{f(x_k^p)} - \frac{1}{2}\frac{f'(x_k^p)^2}{f(x_k^p)^2}}(x - x_k^p) - C\right)^2\right), \tag{5.9}$$

де постійна C рівна

$$C = \frac{3}{4}\frac{f^{'}(x_k^p)}{\sqrt{A_1 f(x_k^p) - \frac{1}{2}(f^{'}(x_k^p))^2}}. \tag{5.10}$$

Для того, щоб одержати хвильову функцію, похідна від якої буде неперервною функцією, врахуємо, що, якщо на деякому проміжку хвильова функція $\psi_0(x)$ задовольняє рівняння Шредінґера, то і хвильова функція $-\psi_0(x)$ на цьому ж проміжку задовольняє те саме рівняння. Завдяки цьому можна змінити знак функції у деяких областях так, щоб і сама хвильова функція і її похідна були неперервними функціями. Для цього слід зробити заміну $|x - x_k^p| \to (x - x_k^p)$. Тоді поведінка хвильової функції буде такою

$$\psi_0(x) \sim (x - x_k^p)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{A_1}{f(x_k^p)} - \frac{1}{2}\left(\frac{f'(x_k^p)}{f(x_k^p)}\right)^2}(x - x_k^p) - C\right)^2\right), \tag{5.11}$$

де x_k^p є нулями хвильової функції.

У цьому випадку хвильова функція з нульовою енергією має стільки ж вузлів, скільки полюсів має суперпотенціал (n), і вона відповідає n - ному збудженому станові. Енергія ж основного стану, у цьому випадку буде від'ємною.

Приклад 5.1. Спочатку розглянемо випадок несингулярного суперпотенціалу $W(x)$, який виберемо таким

$$W(x) = A\mathrm{th}(x). \tag{5.12}$$

Вибравши функцію, що описує залежність маси від координат у вигляді

$$f(x) = \frac{\beta}{\mathrm{ch}(x)}, \tag{5.13}$$

приходимо до такого несингулярного потенціалу

$$V_-(x) = A^2\mathrm{th}^2(x) - \frac{A\beta}{\mathrm{ch}^3(x)}. \tag{5.14}$$

Точна хвильова функція основного стану для цього потенціалу має вигляд

$$\psi(x) \sim \sqrt{\frac{\mathrm{ch}(x)}{\beta}}\exp\left(-A\beta\mathrm{ch}(x)\right). \tag{5.15}$$

і описує локалізовані стани.

Приклад 5.2. Тепер розглянемо випадок, коли $W(x)$ має особливості. Зокрема, виберемо суперпотенціал

$$W(x) = \frac{x^2 - 1}{x}, \tag{5.16}$$

який має особливість у точці $x = 0$, а функцію, що описує залежність маси від координат, такою

$$f(x) = x^2 + 1. \tag{5.17}$$

Несингулярний потенціал, що відповідає цьому випадкові є постійним і рівним

$$V_{-}(x) = -4. \tag{5.18}$$

Хвильова функція стану із нульовою енергією, яка відповідає такому потенціалу, має вигляд

$$\psi_0(x) \sim \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}, \tag{5.19}$$

і описує зв'язані стани, існування яких цілком пов'язане із залежністю маси системи від координат.

Для одержання ще одного власного стану оператора H_{-} врахуємо, що власні значення та власні функції гамільтоніанів H_{+} і H_{-}, пов'язані суперсиметричними перетвореннями (4.72) і (4.73). Розглянувши гамільтоніан H_{+} та знайшовши його основний стан, ми одержимо перший збуджений стан оператора H_{-}. Хвильова функція збудженого стану із енергією ε описується H_{-} (4.79), який містить функцію $W_1(x)$, що визначений у(4.83). Вимога несингулярності потенціалу накладає обмеження на генеруючу функцію $W_{+}(x)$. Розглянемо випадок, коли $W_{+}(x)$ має прості нулі у точках x_k^0, тобто, у околі нулів поведінка $W_{+}(x)$ є такою

$$W_{+}(x) = W_{+}'(x_k^0)\ (x - x_k^0) + \frac{1}{2} W_{+}''(x_k^0)\ (x - x_k^0)^2 + O(x - x_k^0). \tag{5.20}$$

Нулі функції $W_+(x)$ спричиняють сингулярності суперпотенціалу $W(x)$. Розклавши у околі точок x_k^0 функцію, що описує залежність маси від координат, у ряд Тейлора з точністю до $(x-x_k^0)^2$ і підставивши ці розклади у вираз для $W_+(x)$ та обмежившись лінійними вкладами, одержимо

$$\begin{aligned} W(x) &= -\left(\tfrac{f(x_k^0)}{2} - \tfrac{\varepsilon}{W_+'(x_k^0)}\right)\tfrac{1}{(x-x_k^0)} - \tfrac{W_+''(x_k^0)}{2W_+'(x_k^0)}\left(\tfrac{f(x_k^0)}{2} + \tfrac{\varepsilon}{W_+'(x_k^0)}\right)- \\ &\quad -\tfrac{f'(x_k^0)}{2} + O((x-x_k^0)). \end{aligned} \tag{5.21}$$

Поведінка суперпотенціалу $W_1(x)$ у околі x_k^0 подібна до $W(x)$, але має протилежний знак. Цей суперпотенціал спричиняє таку поведінку у околі точки x_k^0 потенціалу $V_-(x)$

$$\begin{aligned} V_-(x) &= \left(\left(\tfrac{\varepsilon}{W_-'(x_k^0)}\right)^2 - \left(\tfrac{f(x_k^0)}{2}\right)^2\right)\left(\tfrac{1}{(x-x_k^0)^2} - \tfrac{W_+''(x_k^0)}{W_+'(x_k^0)}\tfrac{1}{(x-x_k^0)}\right) \\ &\quad +O(const). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Неважко бачити, що при

$$f(x_k^0)W_+(x_k^0) = \pm 2\varepsilon \tag{5.23}$$

потенціальна енергія $V_-(x)$ буде несингулярною.

Якщо $W_+'(x_k^0)$, у деяких точках має додатні значення, а у інших – від'ємні, то зручно розбити множину точок у яких потенціал сингулярний на дві підмножини, першу x_k^+, у яких $f(x_k^+)W_+(x_k^+) > 0$ і другу x_k^-, у яких $f(x_k^-)W_+(x_k^-) < 0$. Тоді при $\varepsilon > 0$

$$f(x_k^+)\ W_+'(x_k^+) = 2\varepsilon, \tag{5.24}$$

а

$$f(x_k^-)\ W_+'(x_k^-) = -2\varepsilon. \tag{5.25}$$

Тепер, наприклад, при $f(x_k^+)\ W_+'(x_k^+) = 2\varepsilon$ сингулярності при x_k^+ зникають і $W(x)$ та $W_1(x)$ матимуть сингулярності лише у точках x_k^-, у околі яких їх поведінка є такою

$$W(x) = -\frac{f(x_k^-)}{x - x_k^-} - \frac{f'(x_k^-)}{2} + O(x - x_k^-), \tag{5.26}$$

$$W_1(x) = \frac{f(x_k^-)}{x - x_k^-} + \frac{f'(x_k^-)}{2} + O(x - x_k^-). \tag{5.27}$$

Використавши знайдений суперпотенціал $W(x)$ для одержання хвильової функції із нульовою енергією знайдемо, що у околі точок x_k^- вона веде себе як

$$\psi_0^-(x) \sim (x - x_k^-). \tag{5.28}$$

Відповідно, використавши $W_1(x)$ знайдемо хвильову функцію $\psi_\varepsilon^-(x)$. Вона має n^+ вузлів у точках x_k^+. Якщо $W_+(x)$ є неперервною функцією то $n^+ = n^- + 1$. Тому $\psi_0^-(x)$ і $\psi_\varepsilon^-(x)$ відповідають n^-- ому і $(n^- + 1)$ - му збудженим станам відповідно.

Тепер розглянемо випадок, коли функція $W_+(x)$ має у точках x_k^p також і прості полюси, у околі яких вона веде себе як

$$W_+(x) = \frac{G_{-1}}{x - x_k^p} + G_0 + O(x - x_k^p). \tag{5.29}$$

Тоді у околі точок x_k^p для суперпотенціалу одержуємо

$$\begin{aligned} W(x) &= \tfrac{1}{2}\tfrac{G_{-1}+f(x_k^p)}{x-x_k^p} + \tfrac{1}{2}\Big(G_0 - \tfrac{G_0}{G_{-1}}f(x_k^p) + f'(x_k^p)\Big) + O(x - x_k^p), \\ W_1(x) &= \tfrac{1}{2}\tfrac{G_{-1}-f(x_k^p)}{x-x_k^p} + \tfrac{1}{2}\Big(G_0 + \tfrac{G_0}{G_{-1}}f(x_k^p) - f'(x_k^p)\Big) + O(x - x_k^p). \end{aligned} \tag{5.30}$$

Розклавши у околі особливих точок x_k^p функцію $f(x)$ з точністю до квадратичних вкладів, цей суперпотенціал приводить до потенціалу $V_-(x)$ з такою поведінкою

$$\begin{aligned} V_-(x) &= \tfrac{1}{4}\tfrac{(G_{-1}+f(x_k^p))(G_{-1}+3f(x_k^p))}{(x-x_k^p)^2} \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\tfrac{G_{-1}+f(x_k^p)}{x-x_k^p}\Big(G_0 + \tfrac{G_0 f(x_k^p)}{G_{-1}} + 2f'(x_k^p)\Big) + O(const). \end{aligned} \tag{5.31}$$

Як видно із потенціалу він буде несингулярним у випадку

$$G_{-1} = -f(x_k^p) \tag{5.32}$$

або

$$G_{-1} = -3f(x_k^p), G_0 = -3f^{'}(x_k^p). \tag{5.33}$$

У випадку, коли $G_{-1} = -f(x_k^p)$ приходимо до таких суперпотенціалів

$$\begin{aligned} W(x) &= G_0 + \tfrac{1}{2}f^{'}(x_k^p) + O(x - x_k^p), \\ W_1(x) &= -\tfrac{f(x_k^p)}{x - x_k^p} - \tfrac{1}{2}f^{'}(x_k^p) + O(x - x_k^p). \end{aligned} \tag{5.34}$$

Хвильові функції $\psi_0^-(x)$ і $\psi_\epsilon^-(x)$ обчислені за цими суперпотенціалами не мають нулів у точках x_k^p, які у цьому випадку позначимо a_k, $k = 1, \ldots, n^p$. Але $W_+(x)$ крім $n = n^+ + n^-$ нулів у точках x_k^+ і x_k^- має ще і n^p полюсів у точках x_k^p і, отже, є розривною функцією. Тому у цьому випадку маємо $n^+ = n^- + n^p + 1$). Використовуючи результат одержаний у випадку 1, приходимо до висновку, що хвильова функція $\psi_0^-(x)$ матиме нулі у точках x_k^- і відповідатиме (n^-)-му збудженому станові, а хвильова функція $\psi_\varepsilon^-(x)$ матиме нулі у точках x_k^+ і відповідатиме $(n^- + n^p + 1)$-му збудженому станові.

У випадку, коли $G_{-1} = -3f(x_k^p)$ і $G_0 = -3f^{'}(x_k^p)$

$$\begin{aligned} W(x) &= -\tfrac{f(x_k^p)}{x - x_k^p} + f^{'}(x_k^p) + O(x - x_k^p), \\ W_1(x) &= -2\tfrac{f(x_k^p)}{x - x_k^p} - \tfrac{f^{'}(x_k^p)}{2} + O(x - x_k^p). \end{aligned} \tag{5.35}$$

Хвильові функції $\psi_0^-(x)$ і $\psi_\varepsilon^-(x)$ обчислені з а цими суперпотенціалами мають спільні нулі у точках x_k^p, які у цьому випадку позначимо b_k, $k = 0, 1, ..m^p$. Якщо крім полюсів $W_+(x)$ має ще і $n = n^+ + n^-$ нулів у точках x_k^- і x_k^+ , то хвильова функція $\psi_0^-(x)$ відповідатиме $(n^- + m^p)$-му збудженому станові, а хвильова функція $\psi_\varepsilon^-(x)$ відповідатиме $(n^- + 2m^p + 1)$-му збудженому станові.

Розглянемо приклади несингулярних потенціалів, для яких можна знайти точні розв'язки для основного та першого збудженого станів для деяких генеруючих функцій та функцій, що описують залежність маси від координат.

Приклад 5.3. Тепер розглянемо приклади, у яких генеруючими функціями буде $W_+(x)$. Спочатку розглянемо таку $W_+(x)$, яка має лише нулі. Зокрема, виберемо її такою

$$W_+(x) = A\mathrm{sh}(x). \tag{5.36}$$

Вона має нуль у точці $x = 0$, а функцію, що описує залежність маси від координат виберемо такою

$$f(x) = \beta\mathrm{ch}(x). \tag{5.37}$$

У цьому випадку $f(x_0) = \beta$, $\varepsilon = f(x_0)W_+(x_0) = \frac{A\beta}{2}$, і ми приходимо до таких суперпотенціалів

$$\begin{aligned} W(x) &= \tfrac{A-\beta}{2} \\ W_1(x) &= \tfrac{A+\beta}{2}\mathrm{sh}(x), \end{aligned} \tag{5.38}$$

які при $A = \beta$ переходять у

$$\begin{aligned} W(x) &= 0 \\ W_1(x) &= \mathrm{sh}(x). \end{aligned} \tag{5.39}$$

Відповідний знайденому суперпотенціалові потенціал має вигляд

$$V_-(x) = \frac{A^2 + 3\beta^2 - 4A\beta}{4}\mathrm{sh}(x) - \beta\frac{A-\beta}{2}, \tag{5.40}$$

який при $A = \beta = 1$ переходить у нульовий $V_-(x) = 0$.

Хвильові функції станів із нульовою енергією та енергією рівною ε є такими

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &\sim \mathrm{ch}^{-\frac{A}{2\beta}}(x), \\ \psi_\varepsilon(x) &\sim \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}^{-\frac{A}{2\beta}-1}(x). \end{aligned} \tag{5.41}$$

При $A = \beta = 1$ хвильові функції $\psi_0(x)$, $\psi_\varepsilon(x)$ є такими

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &\sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}(x)}}, \\ \psi_\varepsilon(x) &\sim \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}^{-\frac{3}{2}}(x). \end{aligned} \tag{5.42}$$

Приклад 5.4. Тепер розглянемо випадок, коли $W_+(x)$ має як нулі так і полюси. Зокрема, виберемо її такою

$$W_+(x) = \alpha x \frac{x^2 - a^2}{x^2 - 1}, \tag{5.43}$$

де α і a - довільні позитивно визначені сталі.

Ця функція має три нулі у точках $x_k^0 = 0, \pm a$ та два прості полюси у точках $x_k^p = \pm 1$.

Умова того, щоби добутки $f(x_k^0)W_+'(x_k^0)$ у всіх трьох нулях були однакові, накладає обмеження на сталу $a/$. Умовою сталості цих добутків є

$$a^2 = 2\frac{f(x_k^a)}{f(x_k^0)} + 1, \tag{5.44}$$

Якщо функцію, яка описує залежність маси від координат, вибрати такою

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + b^2}, \tag{5.45}$$

то при $b = 1$ для a^2 одержуємо $a^2 = \sqrt{3}$.

З умови $G_{-1} = -f(x_k^p)$ знайдемо, що потенціал $V_-(x)$ буде несингулярним, якщо

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3} - 1}. \tag{5.46}$$

Отже, приходимо до такої генеруючої функції

$$W_+(x) = \frac{x}{\sqrt{3} - 1}\frac{x^2 - \sqrt{3}}{x^2 - 1} \tag{5.47}$$

та функції, що описує залежність маси від координат

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \tag{5.48}$$

які приводять до таких суперпотенціалів

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{1}{2}\frac{x^4+5x^2-3\sqrt{3}x^2+6-5\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)(x^2+1)(x^2-\sqrt{3})}x, \\ W_1(x) &= \frac{1}{2}\frac{-x^6+2x^4+\sqrt{3}x^4+2\sqrt{3}x^2-5x^2-12+5\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)(x^4-1)(x^2-\sqrt{3})}x. \end{aligned} \tag{5.49}$$

Знайдений суперпотенціал та вибрана залежність маси від координат дають наступний несингулярний потенціал

$$\begin{aligned} V_-(x) = \frac{1}{2}&\frac{x^{11}+(7-4\sqrt{3})x^9-x^8+(26-18\sqrt{3})x^7+2x^6}{(\sqrt{3}-1)(x^2+1)^3(x^2-\sqrt{3})^2} \\ &\frac{(50-30\sqrt{3})x^5-2(\sqrt{3}-2)x^4+(45-22\sqrt{3})x^3}{(\sqrt{3}-1)(x^2+1)^3(x^2-\sqrt{3})^2} \\ &\frac{-(6-4\sqrt{3})x^2(15-6\sqrt{3})x-15+6\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)(x^2+1)^3(x^2-\sqrt{3})^2}. \end{aligned} \tag{5.50}$$

Хвильова функція стану із нульовою енергією

$$\psi_0(x) \sim \sqrt{x^2+1}\exp\left(-\frac{x^4}{4}-\frac{(5-2\sqrt{3})x^2}{2}\right) \tag{5.51}$$

не має вузлів і, отже, описує точний розв'язок для основного стану.

Хвильова функція стану із енергією ε

$$\psi_\varepsilon(x) \sim x(x^2-\sqrt{3})\sqrt{x^2+1}\exp\left(-\frac{x^4}{8}+\frac{x^2}{4}\right) \tag{5.52}$$

має три вузли і, отже, є точним розв'язком для третього збудженого стану.

Таким чином, ми узагальнили метод побудови КТР потенціалів із двома довільними станами, розвинутий у роботі [35], на випадок маси, залежної від координат та сингулярних суперпотенціал $W(x)$ або генеруючої функції $W_+(x)$, що приводять до несингулярної потенціальної енергії $V_-(x)$, та одержали умови, за яких сингулярний суперпотенціал $W(x)$ та генеруюча функція $W_+(x)$, що має прості нулі та сингулярності приводить до несингулярної потенціальної енергії $V_-(x)$.

В наступному підрозділі ми детально розглянемо квазіточно розв'язувані періодичні потенціали для систем з масою, яка є періодичною функцією координат.

5.3 Квазіточно розв'язувані періодичні потенціали для систем з масою, що є періодичною функцією координат

У другому розділі роботи ми розглянули КТР періодичні потенціали для систем із постійною масою. У цьому розділі методи суперсиметричної квантової механіки ми застосуємо для відшукання одного і двох точних розв'язків періодичних систем, маса яких також є періодичною функцією від координат, шляхом генерування відповідних КТР потенціалів. При цьому ми використаємо основні співвідношення суперсиметричної квантової механіки для систем із координатно залежною масою (підрозділи 4.2, 4.4, 4.5 і 4.6).

Для періодичних систем характерними є періодичність потенціальної енергії, блохівський вигляд хвильової функції. У випадку постійної маси для таких систем справедлива осциляційна теорема [107]. Можна показати, зробивши заміну змінних у рівнянні Шредінґера за допомогою функції, яка описує залежність маси від координат, що для систем із координатно залежною масою, основні висновки осциляційної теореми також мають місце.

Для періодичних систем хвильові функції є також періодичними функціями. Як показано у роботах [45, 47] умова періодичності хвильової функції при постійній масі вимагає накладання на періодичний суперпотенціал $W(x+L) = W(x)$ умови (2.9), яка забезпечує обмеженість хвильової функції на усій числовій осі і яку можна узагальнити для випадку систем із масою залежною від координат

$$\int_0^L \frac{W(x)}{f(x)} dx = 0, \tag{5.53}$$

де $f(x)$) є також періодичною функцією із періодом L, або числом кратним L. Це випливає із вигляду хвильової функції (4.35). У найпростіший спосіб задовольнити (5.53) можна вибравши $W(x)$) непарною функцією відносно середньої точки інтервалу періодичності, а $f(x)$) - парною.

Методику суперсиметричної квантової механіки ми спочатку застосуємо для генерування КТР періодичних потенціалів, у полі яких знаходиться система, маса якої також є періодичною функцією від координат. Як видно із (4.35), вибираючи різні суперпотенціали $W(x)$ та функції $f(x)$, можна знайти розв'язок для основного стану системи. У цьому підрозділі ми розглянемо несингулярні періодичні потенціали, які у найпростішому випадку можна одержати використовуючи несингулярний суперпотенціал $W(x)$. Як показано у роботах [37, 90, 92], несингулярний потенціал можна також одержати, використовуючи сингулярний суперпотенціал. Зокрема, якщо $W(x)$ має прості полюси у точках x_k^p із такою поведінкою у їх околі

$$W(x) = \frac{A_{-1}}{x - x_k^p} + A_0 + A_1(x - x_k^p) + O((x - x_k^p)^2). \tag{5.54}$$

то потенціал $V_-(x)$ буде несингулярним у двох випадках, або за умови (5.3) або за умови (5.6). Підставляючи знайдені суперпотенціали у (4.35) знаходимо, що поведінка хвильової функції у околі особливих точок у випадку (5.3) є такою (5.9), а у випадку (5.6) – такою (5.11).

Розглянемо, як приклад, випадок коли маса та суперпотенціал є періодичними функціями, що не мають особливостей.

Приклад 5.5. Нехай

$$W(x) = A\sin(x), \tag{5.55}$$

а

$$f(x) = 1/(a + b\sin^2(x)), \tag{5.56}$$

де $A, b, c > 0$ і $b > c$. Функція $W(x)$ має нулі у точках $x_k^0 = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$.

У цьому випадку потенціал $V_-(x)$ має вигляд

$$V_-(x) = A^2 \sin^2(x) - A\frac{\cos(x)}{a + b\sin^2(x)}, \tag{5.57}$$

а точний розв'язок для стану з нульовою енергією є таким

$$\psi_0(x) \sim \sqrt{a + b\sin^2(x)} \exp\left(A(a+b)\cos(x) - \frac{Ab}{3}\cos^3(x)\right). \tag{5.58}$$

Одержаний потенціал є періодичною функцією з періодом 2π. Хвильова функція ψ_0^- має такий самий період та не має вузлів, а тому за осциляційною теоремою вона відноситься до дна першої зони.

Обернена до вибраної у попередньому випадку функція

$$f(x) = a + b\sin^2(x) \tag{5.59}$$

також приводить до несингулярного потенціалу $V_-(x)$

$$V_-(x) = A^2 \sin^2(x) - A(a+b)\cos(x) + Ab\cos^3(x), \tag{5.60}$$

а точною хвильовою функцією стану із нульовою енергією є

$$\psi_0(x) \sim \frac{1}{\sqrt{a + b\sin^2(x)}} \left(\frac{\sqrt{\frac{a+b}{b}} + \cos(x)}{\sqrt{\frac{a+b}{b}} - \cos(x)}\right)^{\frac{A}{2\sqrt{b(a+b}}}. \tag{5.61}$$

Період цієї хвильової функції рівний 2π, вона не має вузлів і тому також відноситься до дна першої зони.

Приклад 5.6. Тепер розглянемо випадок періодичних маси та сингулярного суперпотенціалу. Нехай

$$W(x) = A\mathrm{tg}(x). \tag{5.62}$$

Ця функція має нулі у точках $\beta x_k^0 = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ та полюси у точках $\beta x_k^p = \frac{\pi}{2} + n\pi$, де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Виразивши потенціал через суперпотенціал $W(x)$ і функцію $f(x)$, одержимо

$$V_{-}(x)=A^2\mathrm{tg}^2(x)-\frac{Af(x)}{\cos^2(x)}=A\frac{A-f(x)}{\cos^2(x)}-A^2. \qquad (5.63)$$

Наведений потенціал має особливості у точках $x_k^p=\frac{\pi}{2}+n\pi, n=0,\pm1,\pm2....$ Для їх усунення функцію $f(x)$ слід вибрати згідно з умовою (5.6) такою, що задовольняє рівняння

$$f(x_k^p)=A, f^{'}(x_k^p)=0. \qquad (5.64)$$

Якщо залежність маси від координат описується функцією

$$f(x)=\frac{1}{a+b\sin^2(x)}, \qquad (5.65)$$

то несингулярний потенціал $V_{-}(x)$ набуває вигляду

$$V_{-}(x)=-\frac{1}{(a+b)^2}\left(1+\frac{b}{a+b\sin^2(x)}\right), \qquad (5.66)$$

а точна хвильова функція стану з нульовою енергією має вигляд

$$\psi_0(x)\sim\sqrt{a+b\sin^2(x)}\cos(x)\exp\left(-\frac{b}{2(a+b)}\cos^2(x)\right). \qquad (5.67)$$

Знайдений потенціал є періодичною функцією з періодом π. Період хвильової функції рівний 2π, вона має один вузол, і тому відноситься до дна третьої зони.

Якщо ж

$$f(x)=a+b\sin^2(x), \qquad (5.68)$$

то потенціал $V_{-}(x)$ є постійним і при $A=a+b$ рівний

$$V_{-}(x)=-a(a+b), \qquad (5.69)$$

а точні розв'язки для делокалізованого стану із нульовою енергією пов'язані виключно із залежністю маси від координат

$$\psi_0(x)\sim\frac{\cos(x)}{(a+b\sin^2(x))}. \qquad (5.70)$$

Для одержання ще одного власного стану оператора H_- врахуємо, що власні значення та власні функції гамільтоніанів H_+ і H_- пов'язані суперсиметричними перетвореннями (4.72) і (4.73).

Розглянемо приклади несингулярних потенціалів, для яких можна знайти точні розв'язки для основного та першого збудженого станів для деяких періодичних генеруючих функцій та функцій, що описують залежність маси від координат.

Приклад 5.7. Розглянемо спочатку випадок, коли $W_+(x)$ має лише нулі, а саме виберемо $W_+(x)$ такою

$$W_+(x) = A\sin(x). \tag{5.71}$$

Ця функція має нулі у точках $x_k^0 = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, ...$ Функцію $f(x)$, що описує залежність маси від координат виберемо такою

$$f(x) = \frac{1}{a + b\sin^2(x)}. \tag{5.72}$$

Цей вибір забезпечує виконання умови $f(x_k^0)W'_+(x_k^0) = \pm 2\varepsilon$.

Для цього випадку $f(x_k^0) = 1/a$, а $\varepsilon = A/2a$, що приводить до суперпотенціалів

$$\begin{aligned} W(x) &= \tfrac{1}{2}\Big(A\sin(x) + \tfrac{\mathrm{tg}(\frac{x}{2})}{a+b\sin^2(x)} + \tfrac{b}{a}\tfrac{\sin(x)}{a+b\sin^2(x)}\Big), \\ W_1(x) &= \tfrac{1}{2}\Big(A\sin(x) - \tfrac{\mathrm{tg}(\frac{x}{2})}{a+b\sin^2(x)} - \tfrac{b}{a}\tfrac{\sin(x)}{a+b\sin^2(x)}\Big). \end{aligned} \tag{5.73}$$

Зазначимо, що при $a = 1$ і $b = 0$ приходимо до одержаного у [37] суперпотенціалу

$$W(x) = \frac{1}{2}\Big(A\sin(x) + 2\mathrm{tg}(\frac{x}{2})\Big). \tag{5.74}$$

Одержаний суперпотенціал із вибраною функцією $f(x)$ приводить до такого несингулярного потенціалу

$$\begin{aligned} V_-(x) = {} & \tfrac{A^2}{4}\sin^2(x) - \tfrac{1}{4(a+b\sin^2(x))} + \Big(1 + \tfrac{Ab}{2a}\Big)\tfrac{\sin^2(x)}{a+b\sin^2(x)} + \\ & \Big(\tfrac{b^2}{4a^2} - \tfrac{2b}{a}\Big)\tfrac{\sin^2(x)}{(a+b\sin^2(x))^2} + \Big(\tfrac{b^2}{a} - 2b\Big)\tfrac{\sin^2(x)\cos(x)}{(a+b\sin^2(x))^2} + \\ & \Big(\tfrac{b}{2a} - \tfrac{A}{2}\Big)\tfrac{\cos(x)}{(a+b\sin^2(x))^2}, \end{aligned} \tag{5.75}$$

який також при $a = 1$ і $b = 0$ переходить у одержаний у [37] несингулярний потенціал

$$V_{-}(x) = \frac{A^2}{4} + \frac{A}{2} - \frac{1}{4} - \frac{A^2}{4}\cos^2(x) - A\cos(x). \qquad (5.76)$$

При умові $A > 0$ і $a > b > 0$ делокалізовані стани із нульовою енергією описуються хвильовою функцією

$$\psi_0^-(x) = C_0\sqrt{a + b\sin^2(x)}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\exp\left(\frac{1}{2}(Aa + Ab + \frac{b}{a})\cos(x) - \frac{Ab}{6}\cos^3(x)\right), \qquad (5.77)$$

а при умові $a > b$ делокалізовані стани із енергією $\varepsilon = \frac{A}{2a}$ описуються хвильовою функцією

$$\psi_\varepsilon^-(x) = C_1\sqrt{a + b\sin^2(x)}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\exp\left(\frac{1}{2}(Aa + Ab - \frac{b}{a})\cos(x) - \frac{Ab}{6}\cos^3(x)\right). \qquad (5.78)$$

Знайдений потенціал (5.75) є періодичною функцією з періодом 2π. Хвильові функції ψ_0^- і ψ_ε^- мають період 4π та по одному вузлові. Згідно з осциляційною теоремою ψ_0^- відноситься до верхньої межі першої зони, а ψ_ε^- - до дна другої зони.

Приклад 5.8. Тепер розглянемо випадок, коли генеруюча функція $W_+(x)$ має як нулі, так і прості полюси. За таку функцію виберемо

$$W_+(x) = A\mathrm{tg}(\beta x). \qquad (5.79)$$

Ця функція має нулі у точках $\beta x_k^0 = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$. Крім нулів вона має також полюси у точках $\beta x_k^p = \frac{\pi}{2} + n\pi$, де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Запишемо вираз для суперпотенціалів, не конкретизуючи вигляд функції $f(x)$, яка описує залежність маси від координат. Енергія ε буде рівною $\varepsilon = \frac{1}{2}W_+'(x_k^0)f(x_k^0)$, а, додавши і віднявши доданки, що виражаються через значення функції $f(x)$ у особливих точках генеруючої функції, знайдемо, що суперпотенціали можна звести до вигляду

$$W(x)=\frac{1}{2}\Big(\big(A-\beta f(x_k^p)\big)\mathrm{tg}(\beta x)-\beta\big(f(x)-f(x_k^p)\big)\mathrm{tg}(\beta x)-\beta\frac{f(x)-f(x_k^0)}{\mathrm{tg}(\beta x)}\Big) \tag{5.80}$$

$$W_1(x)=\frac{1}{2}\Big(\big(A+\beta f(x_k^p)\big)\mathrm{tg}(\beta x)+\beta\big(f(x)-f(x_k^p)\big)\mathrm{tg}(\beta x)+\beta\frac{f(x)-f(x_k^0)}{\mathrm{tg}(\beta x)}\Big). \tag{5.81}$$

Прирівнюючи коефіцієнти розкладу генеруючої функції $W_+(x)$ у ряд в околі точки x_k^p із розкладом (5.34), знаходимо, що потенціал $V_-(x)$ буде несингулярним, коли $A=\beta f(x_k^p)$, або, порівнюючи розклад генеруючої функції із розкладом (5.35), приходимо до такої умови несингулярності потенціалу $A=3\beta f(x_k^p)$.

Тепер виберемо явний вигляд функції $f(x)$ так, щоби вона у всіх особливих точках вона набувала однакових значень і одного знаку. Зокрема, візьмемо її такою

$$f(x)=\frac{1}{a+b\sin^2(\beta x)}. \tag{5.82}$$

У цьому випадку $f(x_k^0)=\frac{1}{a+b}$ і суперпотенціали набувають вигляду

$$W(x)=\frac{1}{2}\Big(\big(A-\frac{\beta}{a+b}\big)\mathrm{tg}(\beta x)-\frac{\beta b^2}{2a(a+b)}\frac{\sin(2\beta x)}{a+b\sin^2(\beta x)}\Big), \tag{5.83}$$

$$W_1(x)=\frac{1}{2}\Big(\big(A+\frac{\beta}{a+b}\big)\mathrm{tg}(\beta x)+\frac{\beta b^2}{2a(a+b)}\frac{\sin(2\beta x)}{a+b\sin^2(\beta x)}\Big), \tag{5.84}$$

При $A=\frac{\beta}{a+b}$, що відповідає випадку (5.32) суперпотенціал $W(x)$ не має особливостей

$$W(x)=\frac{b^2}{8a(a+b)}\cos(2\beta x), \tag{5.85}$$

а його партнер $W_1(x)$ сингулярний і має вигляд

$$W_1(x)=\frac{\beta}{a+b}\mathrm{tg}(\beta x)+\frac{\beta b^2}{4a(a+b)}\frac{\sin(2\beta x)}{a+b\sin^2(\beta x)}. \tag{5.86}$$

Несингулярний потенціал $V_-(x)$ є таким

$$\begin{aligned} V_-(x) \;=\; & \tfrac{\beta^2 b}{2a(a+b)}\left[\tfrac{b}{8a(a+b)}+\tfrac{1}{a+b\sin^2(\beta x)}\right]\tfrac{\sin^2(2\beta x)}{(a+b\sin^2(\beta x))^2}- \\ & -\tfrac{\beta^2 b^2}{2a(a+b)}\tfrac{\cos(2\beta x)}{(a+b\sin^2(\beta x))^2}. \end{aligned} \tag{5.87}$$

Хвильові функції стану із нульовою енергією і стану з енергією ε мають вигляд

$$\psi_0(x) \sim \sqrt{a+b\sin^2(\beta x)}\exp\Big(-\frac{b^2\cos(2\beta x)}{8a(a+b)}\Big), \tag{5.88}$$

$$\psi_\varepsilon(x) \sim \sqrt{a+b\sin^2(\beta x)}\sin(\beta x)\exp\Big(-\frac{b(2a-b)\cos(2\beta x)}{4a(a+b)}\Big). \tag{5.89}$$

Цей потенціал є періодичною функцією з періодом π/β. Хвильова функція ψ_0^- має період $2\pi/\beta$ та не має вузлів, а ψ_ε^- має період $2\pi/\beta$ та один вузол. Згідно із осциляційною теоремою ψ_0^- відноситься до верхньої межі першої зони, а ψ_ε^- - до дна другої зони.

При $A=\frac{3\beta}{a+b}$ співвідношення (5.33) приводять до $G_0=-f'(x_k^p)=0$ суперпотенціали є сингулярними і мають вигляд

$$W(x)=\frac{\beta}{a+b}\mathrm{tg}(\beta x)-\frac{\beta b^2}{4a(a+b)}\frac{\sin(2\beta x)}{a+b\sin^2(\beta x)}, \tag{5.90}$$

$$W_1(x)=\frac{2\beta}{a+b}\mathrm{tg}(\beta x)+\frac{\beta b^2}{4a(a+b)}\frac{\sin(2\beta x)}{a+b\sin^2(\beta x)}, \tag{5.91}$$

а хвильові функції стану із нульовою енергією та енергією ε мають вигляд

$$\psi_0(x) \sim \sqrt{a+b\sin^2(\beta x)}\cos(\beta x)\exp\Big(-\frac{b(2a+b)\cos(2\beta x)}{8a(a+b)}\Big) \tag{5.92}$$

$$\psi_\varepsilon(x) \sim \sqrt{a+b\sin^2(\beta x)}\sin(2\beta x)\exp\Big(-\frac{b(4a-b)\cos(2\beta x)}{8a(a+b)}\Big) \tag{5.93}$$

Потенціал $V_-(x)$, явний вигляд якого не наведений через його громіздкість, є періодичним, період якого складає $2\pi/\beta$. Хвильова функція ψ_0^- також період із періодом $2\pi/\beta$ та один вузол, а ψ_ε^- має період

π/β та два вузли. Згідно із осциляційною теоремою ψ_0^- відноситься до дна другої зони, а ψ_ε^- - до верхньої межі другої зони.

Зазначимо, що при виборі функції, що описує залежність маси від координат у вигляді

$$f(x) = a + b\sin^2(\beta x), \tag{5.94}$$

приходимо до нульових суперпотенціалу $W(x) = 0$ (5.80) та потенціалу $V_-(x) = 0$. Суперпотенціал $W_1(x)$ у цьому випадку набуває вигляду

$$W_1(x) = \beta(a+b)\mathrm{tg}(\beta x), \tag{5.95}$$

а точні розв'язки для станів із нульовою енергією та енергією рівною ε мають вигляд

$$\psi_0(x) \sim \sqrt{a + b\sin^2(\beta x)}, \tag{5.96}$$

$$\psi_\varepsilon(x) \sim \frac{1}{(\sqrt{a + b\sin^2(\beta x)})^3}\sin(2\beta x). \tag{5.97}$$

Таким чином, в цьому підрозділі нами узагальнено метод побудови КТР періодичних потенціалів, розвинутий в [37] на випадок маси, залежної від координат та встановлено умови, яким повинні задовольняти генеруючі функції, щоб отриманий потенціал був несингулярним.

5.4 Висновки до розділу 5

У цьому розділі суперсиметричний метод конструювання квазіточно розв'язуваних потенціалів, запропонований в [35], узагальнено на випадок частинки з масою, залежною від координат та сингулярних суперпотенціалів W чи генеруючих функцій W_+. Знайдено умови, за яких потенціал $V_-(x)$ буде несингулярним, незважаючи на сингулярності в суперпотенціалі $W(x)$ і генеруючій функції $W_+(x)$.

Також в цьому розділі метод побудови квазіточно розв'язуваних періодичних потенціалів узагальнено на випадок частинки, маса якої залежить від координат. Наведено приклади квазіточно розв'язуваних періодичних потенціалів для основного та першого збудженого станів та двох довільних станів, які отримуються з періодичних суперпотенціалів W чи генеруючих функцій W_+ для частинки з періодичною залежністю маси системи від координат.

Досліджено випадки, коли залежна від координат маса та суперпотенціал $W(x)$ чи генеруюча функція $W_+(x)$ приводять до постійного потенціалу. Зауважимо, що в цьому випадку рух частинки не вільний, оскільки у оператор кінетичної енергії входить залежність маси від координат, і при іншому способі упорядкування вона приводить до деякої ефективної потенціальної енергії.

Результати цього розділу опубліковано у роботі [99].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розвинуто суперсиметричний метод конструювання квазіточно розв'язуваних потенціалів для випадку періодичних та випадкових потенціалів, а також для систем з масою, залежною від координат.

Зокрема, суперсиметричний метод конструювання квазіточно розв'язуваних потенціалів узагальнено для випадку періодичних потенціалів з двома та трьома точними розв'язками Це дозволило отримати вже існуючі та нові періодичні квазіточно розв'язувані потенціали, для яких відомі два або три точних розв'язки. Один з отриманих потенціалів відтворює відомий раніше потенціал, запропонований Турбінером, а інший є узагальненням відомого потенціалу Разаві. Проведено аналіз одержаних результатів за допомогою осциляційної теореми.

Суперсиметричний метод застосовано для конструювання квазіточно розв'язуваних випадкових потенціалів з одним та двома відомими рівнями. Досліджено умови, за яких отриманий випадковий потенціал приводить до двох точних розв'язків, а стани, які описують ці розв'язки, відносяться до делокалізованих станів. Отримано квазіточно розв'язувану випадкову модель Кроніга-Пенні і випадкові тригонометричні потенціали з одним та двома точними розв'язками.

Показано, що у довгохвильовій границі гамільтоніан неоднорідної моделі сильного зв'язку описує частинку з масою, залежною від координат. Розв'язано в цьому випадку проблему впорядкування імпульсу та маси в операторі кінетичної енергії.

Запропоновано новий більш загальний вигляд оператора кінетичної енергії для частинки з масою, залежною від координат, який параметризується трьома функціями, добуток яких пов'язаний з масою частинки.

Суперсиметричний метод конструювання квазіточно розв'язуваних потенціалів узагальнено для випадку частинок з масою, залежною від координат. Отримано нові квазіточно розв'язувані потенціали з одним та двома рівнями для частинки з масою, залежною від координат.

В рамках суперсиметричного методу встановлено умови існування локалізованих станів у постійному потенціалі для частинки з масою, залежною від координат.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Дірак П. А. М. Принципы квантовой механики / П. А. М. Дірак. — М.: Наука, 1979. — 274 с.

[2] Гольфанд Ю. А. Расширение алгебры операторов группы Пуанкаре и нарушение инвариантности / Ю. А. Гольфанд, Е. П. Лихтман // Письма в ЖЭТФ. — 1971. — Т. 13, No.8. — С. 452 - 456.

[3] Witten E. Dynamical Breaking of Supersymmetry / E. Witten // Nucl. Phys. B. — 1981. — V. 188, No. 3. — P. 513 - 554.

[4] Schrödinger E. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions / E. Schrödinger // Proc. Roy. Irish. Acad. Sect. A. – 1940. – V. 46. – P. 9 – 16.

[5] Infeld L. The Factorization Method / L. Infeld, T. D. Hull // Rev. Mod. Phys. – 1951. – V. 23, No.1. – P. 21 - 68.

[6] Генденштейн Л. Э. Нахождение точного спектра уравнения Шредингера методами суперсимметрии / Л. Э. Генденштейн // Письма в ЖЭТФ. — 1983. — Т. 38, № 3. — P. 356 - 358.

[7] Shabat A. The infinite-dimensional dressing dynavical system / A. Shabat // Inverse Prob. – 1992. – V.8, No2. – P. 303 - 308.

[8] Spiridonov V.P. Exactly solvable potentials and quantum algebras / V. P. Spiridonov // Phys.Rev.Lett. – 1992. – V.69, No.3. – P. 398 - 401.

[9] Lau H. K. Construction of self-similar shape invariant potentials with the Padŕe approximation / H. K. Lau, P. T. Leung // J. Phys. A: – 2008. – V.41, No.2. – P.025206 (15pp).

[10] Barclay D. New exactly solvable Hamiltonians: Shape invariance and self-similarity / D. Barclay, R. Dutt, A. Gangopadhyaya, A. Khare, A.Pagnamenta, U. Sukhatme // Phys. Rev. A. – 1993. – V.48, No.4. – P. 2786 – 2796.

[11] Spiridonov V.P. The factorization method, self-similar potentials and quantum algebras / V.P. Spiridonov // – Available from: <arXiv.org:hep-th/0302046 > – 13 p.

[12] Balantekin A. B. Algebraic Nature of Shape-Invariant and Self-Similar Potentials / Balantekin A. B., Candido Ribeiroy M. A., Aleixo A. N. F. // Available from: <arXiv.org > quant-ph > arXiv:quant-ph/9811061> – 8 p.

[13] Chadan K. Inverse Problems in Quantum Scattering Theory / K. Chadan, P.C.Sabatier. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag, 1977. – 344 P.

[14] Abraham P. Changes in potentials due to changes in the point spectrum: Anharmonic oscillators with exact solutions / P. Abraham,H. Moses // Phys. Rev. A. – 1980. – V.22, No.4. – P. 1333 - 1340.

[15] Khare A., Sukhatme U. Countable infinity of isospectral potential families / A.Khare, U. Sukhatme // Phys. Rev. A. – 1989. – V.40, No.11. – P. 6185 - 6187.

[16] Amado R. Phase-equivalent supersymmetric quantum-mechanical partners of the Coulomb potential / R. Amado // Phys. Rev. A. – 1988. – V.37, No.7. – P. 2277 - 2279.

[17] Razavy M. A potential model for torsional vibrations of molecules / M. Razavy // Phys.Lett.A. – 1981. – V.82, No.1. – P. 7 - 9.

[18] Leach P. G. L. Exact solutions of the Schrödinger equation for a class of three-dimensional isotropic anharmonic oscillators / P. G. L. Leach // J.Math. Phys. – 1984. – V.25, No.10 – P. 2974 - 2983.

[19] Turbiner A. Quasi-exactly-solvable problems and sl(2) algebra / A. Turbiner // Comm. Math. Phys. – 1988. – V.118, No.3 – P. 467 - 474.

[20] Ушверидзе А. Г. Квазиточно решаемые модели квантовой механики / А. Г. Ушверидзе // ЭЧАЯ. – 1989. – Т.20., В.5. – С. 1185 - 1245.

[21] Kamran N. Lie algebras of differential operators and Lie-algebraic potentials / N. Kamran, P. Olver // J. Math. Anal. Appl. – 1990. – V.145. – P. 342.

[22] Shifman M. New Findings in Quantum Mechanics (Partial Algebraization of the Spectral Problem) / M. Shifman // Int. Journ. Mod. Phys. A. – 1989. – V.4, No.12. – P. 2897 - 2952.

[23] Caticha A. Construction of exactly soluble double-well potentials / A. Caticha // Phys. Rev.A. – 1995. – V.51, No.5. – P. 4264 - 4267.

[24] Dolya S.N. Quazi-exactly solvable quartic Bose Hamiltonians / S.N. Dolya, O.V. Zaslavsskii // J.Phys. A. – 2001. – V.34, No30. – P. 5955 - 5968.

[25] Dolya S.N. A general approach to potentias with two known levels / S.N. Dolya, O.V. Zaslavsskii // J.Phys. A. – 2001. – V.34, No.10. – P. 1981 - 1989.

[26] Dolya S.N. The quantum anharmonic oscillator and quasi-exactly solvable Bose systems / S.N. Dolya, O.V. Zaslavsskii // J.Phys. A. – 2000. – V.33, No.41. – P. L369 - L374.

[27] Gangopadhyaya A. Metods for generating quasi-exactly solvable potentials / A. Gangopadhyaya, A. Khare, U. P. Sukhatme // Phys. Lett. A. – 1995. – V.208, Iss.4–6. – P. 261 - 268.

[28] Krajewska A. Anti-isospectral transformation in quantum mechanics / A .Krajewska, A. Ushveridze, Z. Walczak // Mod. Phys. Lett.A. – 1997. – V.12, No.17. – P. 1225 - 1234.

[29] Khare A. Anti-isospectral transformations, orthogonal polynomials, and quasi-exactly solvable problems / A. Khare, B. P. Mandal // J. Math. Phys. – 1998. – V.39, No.6. – P. 3476 - 3486.

[30] Luban M. New Schrödinger equanions for old: Inequivalence of Darboux and Abraham-Moses constructions / M. Luban, D. L. Pursey // Phys. Rev. D. – 1986. – V.33, No.2. – P. 431 - 437.

[31] Pursey D.L. Isometric operators, isospectral Hamiltonians, and supersymmetric quantum mechanics / D.L. Pursey // Phys. Rev. D. – 1986. – V.33, No.8 – P. 2267 – 2279.

[32] Захарьев Б. Н. Качественная теория управления сектрами, рассеянием, распадами (Уроки квантовой интуиции) / Б. Н.Захарьев, В. М. Чабанов // ЭЧАЯ – 1994. – Т.25, в.4. – С. 1561 - 1597.

[33] Jatkar D. P. A quasi-exactly solvable problem without Si(2) symmetry / D. P. Jatkar, C.N. Kumar, A. Khare // Phys. Lett. A. – 1989. – V.142, Iss.4-5. – P. 200 - 202.

[34] Roy P. On quasi-exactly solvable problems and supersymmetry / P. Roy, Y. P. Varshni // Mod. Phys. Lett. A. – 1991. – V.6, No.14. – P. 1257 - 1260.

[35] Tkachuk V.M., Quasi-exactly solvable potentials with two known eigenstates // Phys. Lett. A. – 1998.– V.245, Iss.3-4. – P. 177 - 182.

[36] Kuliy T.V. Quasi-exactly solvable potentials with tree known eigenstates / T.V. Kuliy, V.M. Tkachuk // J. Phys. A. – 1999. – V.32, No.11. – P. 2157 - 2169.

[37] Tkachuk V.M., Supersymetric approach for generating quasi-exactly solvable potentials with arbitrary two known eigenstates / V.M. Tkachuk // J. Phys. A. – 2001. – V.34, No.32. – P. 6339 - 6348.

[38] Турбинер А.В. Квантовая механика: задачи промежуточные по отношению к точнорешаемым/ А.В. Турбинер // ЖЭТФ. – 1988. – Т.94, в.2. – С. 33 - 44.

[39] Khare A. New Solvable and Quasi Exactly Solvable Periodic Potentials / A. Khare, U. Sukhatme // J. Math. Phys. – 1999. – V.40, No.11. – P. 5473 - 5494.

[40] Ganguly A. Assciated Lam'e equation, periodic potentialsand sl(2,R) / A. Ganguly // Mod. Phys. Lett. A. – 2000. – V.15, No.31. – P. 1923 - 1931.

[41] Sree Ranjani S. Periodic quasi-exactly solvable models / S. Sree Ranjani, A. K. Kapoor, P. K. Panigrahi // Int.Jour. Theor. Phys. – 2005 – V.44, No.8. – P. 1167 - 1176.

[42] Dunne G. V. Duality and Self-Duality (Energy Reflection Symmetry) of Quasi-Exactly Solvable Periodic Potentials / G. V. Dunne, M. Shifman // Annals. Phys. – 2002. – V.299, No.2. – P. 143 - 173.

[43] Bagchi B. A unified treatment of exactly solvable and quasi-exactly solvable quantum potentials / B. Bagchi, A. Ganguly // J. Phys. A. – 2003. – V.36, No.11. – P. L161 - L168.

[44] Khare A. Periodic potentials and Supersymetry / A. Khare, U. Sukhatme // Available from:<arXiv.org > quant-ph > arXiv:quant-ph/0402206> – 27 p.

[45] Dunne G., Feinberg J. Self-isospectral periodic potentials and supersymmetric quantum mechanics / G. Dunne, J. Feinberg // Phys. Rev. D. – 1998. – V.57, No.2. – P. 1271 - 1276.

[46] Bhaduri R. Shape invariant potentials in SUSY quantum mechanics and periodic orbit theory / R. K. Bhaduri, J.Sakhr, D. W. L. Sprung, R. Dutt, A. Suzuki // J. Phys. A. – 2005. – V.38, No.11. – P. L183 - L189.

[47] Dunne G., Mannix J. Supersymmetry breaking with periodic potentials / G. Dunne, J. Mannix // Phys. Lett. B. – 1998. – V.428, No.1-2. – P. 115 - 119.

[48] Takeda K. Localized and extented states in one-dimensional disordered system: Random-mass Dirac fermions / Takeda K., Tsurumaru T., Ichinose I., Kimura M. // Nuclear Physics B. – 1999. – V.556, Iss.3. – P. 545 - 562.

[49] Chamon C. de C. Localization in two dimensions, gaussian field theories, and multifractality / C. de C. Chamon , C. Mudry, X. G. Wen // Phys. Rev. Lett. – 1996. – V.77, No.20. – P. 4194 - 4197.

[50] Texier C. Effect of boundaries on the spectrum of a one-dimensional random mass Dirac Hamiltonian / Texier C., Hagendorf C. // J. Phys. A. – 2010. – V.43, No.2. – P. 025002(12pp).

[51] Brihaye Y. Quasi-exactly solvable extensions of the Lame equation / Y. Brihaye, M. Godart // J. Math. Phys. – 1993. – V.34, Iss.11. – P. 5283 - 5291.

[52] Halperin B. Green's Functions for a Particle in a One-Dimensional Random Potential / B. Halperin // Phys. Rev. – 1965. – V.139, No.1A. – P. A104 - A117.

[53] Nieuwenhuizen T. M. Exact electronic spectra and inverse localization lengths in one-dimensional random systems / T. M. Nieuwenhuizen // Physica. A. – 1983. – V.120, Iss.2. – P. 468 - 514.

[54] Comtet A. One-Dimensional Disordered Supersymmetric Quantum Mechanics: A Brief Survey / A. Comtet, C. Texier // Available from: < arXiv.org > cond-mat > arXiv:cond-mat/9707313> – 16 p.

[55] Comtet A.Supersymmetric quantum mechanics with Levy disorder in one dimension / A. Comtet, C. Texier // J. Stat. Phys. – 2011. – V.145, Iss.5. – P. 1291 - 1323.

[56] Hagendorf C., Texier C. Breaking supersymmetry in a one-dimensional random Hamiltonian / C. Hagendorf, C. Texier // J. Phys. A. – 2008. – V.41, No.40. – P. 405302(32).

[57] Harrison W. A. Tunneling from an independent-particle point of view / W. A. Harrison / Phys. Rev. – 1961. – V.123, No.1. – P. 85 - 89.

[58] BenDaniel D. J. Space-charge effects on electron tunneling / D. J. BenDaniel, C. B. Duke // Phys. Rev. – 1966. – V.152, No.2. – P. 683 - 692.

[59] Волков В.А. Динамика електрона с пространственно-зависящей массой и метод эффективной массы для полупроводниковых гетороструктур / В.А. Волков, Э.Е. Тахтамиров // УФН. – 1997. – Т.167, No.10. – С. 1123 - 1128.

[60] Morrow R. A. Model effective-mass Hamiltonians for abrupt heterojunctions and the associated wave-function-matching conditions / R. A. Morrow, K. R. Brownstein // Phys. Rev.B. – 1984. – V.30, No.2. – P. 678 - 680.

[61] Shewell J. R. On the Formation of Quantum-Mechanical Operators / J. R. Shewell // Am. J. Phys. – 1959. – V.27, Iss.1. – P. 16 - 21.

[62] Gora T., Williams F. Theory of Electronic States and Transport in Graded Mixed Semiconductors / T. Gora, F. Williams // Phys. Rev. – 1969. – V.177, No.3. – P. 1179 - 1182.

[63] Zhu Q. G. Interface connection rules for effective-mass wave functions at an abrupt heterojunction between two different semiconductors / Q. G. Zhu, H. Kroemer // Phys. Rev. B. – 1983. – V.27, No.6. – P. 3519 - 3527.

[64] Li T. Kuhn. Band-offset ratio dependence on the effective-mass Hamiltonian based on a modified profile of the GaAs-AlxGa1-xAs quantum well / T. Li, K. J. Kuhn // Phys. Rev. B. – 1993. – V.47, No.19. – P. 12760 - 12770.

[65] Mustafa O. Ordering ambiguity revisited via position dependent mass pseudo-momentum operators / O. Mustafa, S. H. Mazhari-mousavi // Int. J. Theor. Phys. – 2007. – V.46, No.7 – P. 1786 - 1796.

[66] von Roos O. Position-dependent effective masses in semiconductor theory / O. von Roos // Phys. Rev.B. – 1983. – V.27, No.12. – P. 7547 - 7552.

[67] Levy-Leblond J. M. Position-dependent effective mass and Galilean invariance / J. M. Levy-Leblond // Phys. Rev.A. – 1995. – V.52, No.3. – p. 1845 - 1849.

[68] Levai G., Ozer O. An exactly solvable Schrödinger equation with finite positive positiondependent effective mass / G. Levai, O. Ozer // J. Math. Phys. – 2010. – V.51, Iss.9. – P. 092103(13pp).

[69] Quesne C. Higher-order SUSY, exactly solvable potentials, and exceptional orthogonal polynomials / C. Quesne // Mod. Phys. Lett. A. – 2011. – V.26, No.25. – P. 1843 - 1852.

[70] Levai G. A search for shape-invariant solvable potentials / G.Levai // J. Phys. A. – 1989. – V.22, No.6. – P. 689 - 702.

[71] Натанзон Г. А. Общие свойства потенциалов, для которых уравнение Шредингера разрешимо в гипергеометрических функциях/ Г. А. Натанзон // ТМФ. – 1979. – Т.38, No.2. – С. 219 - 229.

[72] Levai G. Solvable potentials associated qith su(1,1) algebras: A systematic study / G. Levai // J. Phys. A. – 1995. – V.27, No.11. – P. 3809 - 3828.

[73] Koç R. A systematic study on the exact solution of the position dependent mass Schrödinger equation / R. Koç, M. Koca // J. Phys. A. – 2003. – V.36, No.29. – P. 8105 - 8113.

[74] Bagchi B. Deformed shape invariance and exactly solvable Hamiltonians with position-dependent effective mass / B.Bagchi, A. Banerjee, C. Quesne, V.M. Tkachuk // J. Phys. A. – 2005. – V.38, No.3. – P. 2929 - 2945.

[75] Dekar L. An exactly solvable Schrödinger equation with smooth position-dependent mass / L. Dekar, L. Chetouani, T. F. Hammann // J. Math. Phys. – 1998. – V.39, Iss.5. – P. 2551 - 2563.

[76] de Souza Dutra A. Exact solvability of potentials with spatially dependent effecnive masses / A. de Souza Dutra, C.A.S. Almeida // Phys. Lett. A. – 2000. – V.275, Iss.1-2. – P. 25 - 30.

[77] Roy B. Lie algebraic approach to effective mass Schrödinger equation / B. Roy, A. Roy // J. Phys. A. – 2002. – V.35, No. 17. – P. 3961 - 3969.

[78] BagchiB. A general scheme for the effective mass Schrödinger equation and the generation of the associated potentials / B. Bagchi, P. Gporain, C. Quesne, R.A. Roychoudhury // Mod. Phys. Lett. A. –2004. – V.19, No. 37. – P. 2765 - 2775.

[79] Koç R. A new of quasi solvable potentials with position dependent mass / R. Koç, E. Körcük, M. Koca // J.Phys.A. – 2002 – V.35, No.6 – L527 - L530.

[80] Ganguly A. Shape-invariant quantum Hamiltonian with position-dependent effective mass through second-order supersymmetry / A. Ganguly, L.M. Nieto / J. Phys. A. – 2007. – V.40, No.26. – P. 7265 - 7283.

[81] Andrianov A. A. Nonlinear supersymmetry for spectral design in quantum mechanics / A. A. Andrianov, F. Cannata // J. Phys. A. – 2004. – V.37, No.43. – P .10297 - 10323.

[82] Midya B. Position dependent mass Schröedinger equation and isospectral potentials: intertwining operator approach / B. Midya, B. Roy, R. Roychoudhury // J. Math. Phys. – 2010 – V.51, No. 2 – P. 022109(23pp).

[83] Rub V. C. Removal of ordering ambiguity for a class of position dependent mass quantum systems with an application to the quadratic Liŕenard type nonlinear oscillators / V. C. Rub, V. K. Chandrasekar, M. Senthilvelan, M. Lakshmanan // Available from:< arXiv.org > quant-ph > arXiv:1411.7152/ 26 Nov 2014 > – 30 p.

[84] Perez-Alvarez R. Transfer matrix in 1D Schrödinger problems with constant and position-dependent mass / R. Perez-Alvarez, H. Rodriguez-Coppola. – Miramane-Trieste:International centre for theoretical physics, 1987. – 16P.

[85] Levy-Leblond J. M. Elementary quantum models with position-dependent mass / J. M. Levy-Leblond // Eur.J. Phys. – 1992. – V.13, No.5. – P. 215 - 218.

[86] Sukumar C. V. Supersymmetry, factorisation of the Schrödinger equation and a Hamiltonian hierarchy / C. V. Sukumar // J. Phys. A. – 1985. – V. 18, No.2. – P. L57 - L61.

[87] Quesne C.Deformed algebras, position-dependent effective masses and curve spaces: An exactly solvable Coulomb problem / Quesne C., Tkachuk V.M. // J.Phys.A. – 2004. – V.37, No.14. – P. 4267 - 4281.

[88] Quesne C. Hamiltonians with position-dependent effective mass, deformations and supersymetry / C. Quesne, B. Bagchi, A. Banerjee, V.M. Tkachuk // Bulg. J. Phys. – 2006. – V.33, No.4. – P. 308 - 318.

[89] Plastino F.R. Supersymetric approach to quantum system with pozition-dependent effective mass / F.R. Plastino, A. Rigo, V. Casas, F. Garcias, A. Plastino // Phys.Rev.A. – 1999. – V.60, No.6. – P.4318 - 4326.

[90] Tkachuk V.M. Supersymetric approach for generating quasi-exactly solvable periodic potentials / V.M. Tkachuk, O.O. Voznyak // Journal of Physical Studies (Lviv). – 2002.– V6, No.1. – P. 40 - 45.

[91] Tkachuk V.M. Quasi-exactly solvable periodic and random potentials / V.M. Tkachuk, O.O. Voznyak // Phys. Lett. A. – 2002. – V.301, Iss.3-4. – P. 177 - 183.

[92] Возняк О.О. Квазіточно розв'язувана невпорядкована модель Кроніга-Пенні / О.О. Возняк, В.М. Ткачук // Журнал фізичних досліджень. – 2004. – Т.8, №.1. – С. 16 - 22.

[93] Возняк О. Квазіточно розв'язувані потенціали для частинки з масою, залежною від координат / О. Возняк, В. М. Ткачук // Журн. фіз. дослідж. – 2012. – Т.16, No.1/2. – С. 1003(10 с.).

[94] Возняк О. Квазіточно розв'язувані періодичні потенціали для систем з масою, що є періодичною функцією від координат / О. Возняк // Журн. фіз. дослідж. – 2014. – Т.18, No.1.- С. 1002(10 с.).

[95] Voznyak O. Effective Hamiltonian with position-dependent mass and ordering hroblem / V.M.Tkachuk, O.Voznyak //Eur. Phys. J. Plus. – 2015 – V.130, P.161 (4 p.)

[96] Возняк О. Квазіточно розв'язувані потенціали з двома довільними власними станами для систем із координатно залежною масою / О.Возняк, В.М.Ткачук // Журн. фіз. дослідж. – 2015. – Т.19, №3 – С. 3002 (8 с.)

[97] Voznyak O. Quasi-exactly solvable periodic potentials with three known eigenstates / O. Voznyak // Available from: < arXiv.org:quant-ph/ 0507199/20 Jul 2005. > – 23 p.

[98] Tkachuk V. M. Quasi-exactly solvable periodic and random potentials / V. M. Tkachuk, O. Voznyak // IX th International seminar on physics and chemistry of solids ICSPS'03:[Book of abstracts]. Zloty potok/ Czenstochowy, 28-31 maja 2003.– P. 26.

[99] Возняк О. О. Квазіточно розв'язувана невпорядкована модель Кроніга-Пенні / О. О. Возняк, В. М. Ткачук // Proceedings of II International Conference "Physics of Disordered Systems Lviv, Ukraine, 14-16 October, 2003 = Матеріали ІІ Міжнародної науко-

вої конференції "Фізика невпорядкованих систем Львів, Україна, 14 - 16 жовтня, 2003. – С. 16 - 17.

[100] Возняк О. О. Гамільтоніан газу невзаємодіючих електронів на невпорядкованій ґратці в представленні вторинного квантування / О. О. Возняк, В. М. Ткачук // Proceedings of IV International Conference "Physics of Disordered Systems Lviv, Ukraine, 14-16 October, 2008. = Матеріали IV міжнародної наукової конференції "Фізика невпорядкованих систем". Львів, Україна, 14-16 жовтня, 2008. – С. 39 - 40.

[101] Voznyak O.O. Energy states of electrons with position-depedent effective mass in the quantum nanogeterosystems / O.O. Voznyak, O.M. Voznyak // XIII International conference physics and technology of thin films and nanosystems. Ivano-Frankivsk, Ukraine,– 16-21 May 2011. – V.1. – P. 294.

[102] Voznyak O. Quasi-exactly solvable potentials for particle with position-dependent mass / O. Voznyak // Workshop on current problems in physics. Lviv, Ukraine, – 10-11 July, 2012. – P. 9-10.

[103] Voznyak O.O. Supersymmetric approach for quasiexactly solvable systems with a position dependent mass / Voznyak O.O., Tkachuk V.M. // V International conference "Physics of disordered systems". Lviv, Ukraine, – 14 - 16 October, 2013. – P. 151.

[104] Voznyak O.O. Influence of Coordinate Dependent Effective Mass to the States of Inhomogeneous Semiconductors / O.O. Voznyak, O.M. Voznyak // XIV International conference "Physics and technology of thin films and nanosystems". Ivano-Frankivsk, Ukraine, – 20-25 May, 2013. – P. 516.

[105] Voznyak O. Quasi-exactly solvable potentials with two arbitrary known eigenstates for systems with a position-dependent mass / O. Voznyak // Workshop on current problems in physics. Lviv, Ukraine, – 08-09 July, 2014.– p.14.

[106] Ushveridze A.G. Quasi-exactly solvable models in quantum mechanics / A.G. Ushveridze. – Bristol([England);Philadelphia: Institute of Physics, 1994. – 465P.

[107] Magnus W. Hills equation / W. Magnus, S. Winkler. – New York.: 1966. – 129 P.

[108] Turbiner A.V., Ushveridze A.G. Spectral singularities and quasi-exactly solvable quantal problem / A.V. Turbiner, A.G. Ushveridze // Phys. Lett. A. – 1987.– V.126, Iss.3.– P. 181 - 183.

[109] Turbiner A.V. Lame equation, sl(2) algebra and isospectral deformation / A.V. Turbiner // J.Phys.A. – 1989.– V.22, No.1. – P. L1 - L3.

[110] Kronig R.de L. Quantum mechanics of electrons in crystal lattices / R.de L. Kronig, W. G. Penney // Proc. Roy. Soc.A. – 1931. – V.130. – P. 499 - 513.

[111] Ульянов В. Задачи по квантовой механике и квантовой статистике / В. Ульянов. – Харьков: Вища школа, 1980. – 216 С.

[112] Arscott F.M. Periodic differential equation / F.M.Arscott. – Oxford:Pergamon. – 1981. – 283 P.

[113] Brihade Y, Godart M.J. Quasi-exactly solvable extensions of the Lame equation / Y. Brihade, M.J. Godart // J. Math. Phys. – 1993. – V.34, Iss.11. – P. 5283 - 5291.

[114] Fernandez C.D.J.. Second-order supersymmetric periodic potentials / C.D.J. Fernandez, J. Negro, M. Nietol // Phys. Lett. A. – 2000. – V.275(5), Iss.5 - 6. – P. 338 - 349.

[115] Tkachuk V.M. Supersymmetric method for conctructing quasi-exactly and conditionally-exactly solvable potentials / V.M. Tkachuk // J. Phys. A. – 1999.– V.32, No.7. – P. 1291 - 1300.

[116] Beckers J. More on parasupersymmetries of the Schrödinger equation / J. Beckers, N. Debergh, A.G. Nikitin // Mod. Phys. Lett. A. – 1993. – V.8, No.5. – P. 435 - 444.

[117] Mirlin A.D., Statistics of energy levels and eigenfunctions in disordered systems / A.D. Mirlin // Phys.Rep. – 2000 – V.326, No.5 - 6. P. 259 - 382.

[118] Serra L. Spin resonanse of unpolarized quantum dots/ L. Serra, E. Lipparini // Europhys. Lett. – 1997. – V.40, Iss.6. – p. 667 - 672.

[119] Ткач М.В. Метод Бете в теорії локалізованого екситона у сферичних квантових точках, розташованих у масивному середовищі / Ткач М.В., Березовський Я.М. // Журн. фіз. досл. – 2003. – Т.7, No.2. – С. 188 - 194.

[120] Ring P. The nuclear many-body problem / P. Ring, P. Schuk. – Nev York: Springer-Verlag, 1980. – 716 P.

[121] Arias de Savedra F. Effective mass of one He atom in liquid He / de Savedra F. Arias , J. Boronat, A. Polls, A. Fabrocini // Phys.Rev. B. – 1994. – V.50, Iss.6 – P. 4248 - 4252.

[122] Puente A. Dipole exitation of Na clusters with a non-local energy density functional / A. Puente, L. Serra, M. Casas // Z. Phys. D. – 1994 – V.31, No.4. – P. 283 - 286.

[123] Cavalcante F.S.A. Form of the quantum kinetic-energy operator with spatially varying effective mass / F.S.A. Cavalcante, R.N. Costa Filho, J. Riberio Filho, C.A.S. de Almeida, V. N. Freire // Phys. Rev. B. – 1997. – V.55, Iss.3. – P. 1326 - 1329.

[124] Tkach M.V. Dynamic Conductivity of Electrons and Electron-Phonon Interaction in Open Three-Well Nanostructures / M.V.Tkach, Ju O Seti, Y.B.Grynyshyn, O.M.Voitsekhivska // Acta Physica Polonica A. – 2015. – V.28, Iss.3. – P. 343-352.

[125] Boyko I.V. The influence of static and dynamic spatial charegs on electronic active conductivity of three-barries resonant tunneling structures / I.V.Boyko, Yu.B.Grynyshyn, Ju O Seti, M.V.Tkach // Journal of Physical Studies . – 2014. – V.18, Iss.4. – P. 1-10

[126] Tkach M.V. The effect of interface phonons on operating electron states in three-barrier resonant tunneling structure as an active region of quantum cascade detector / Tkach M.V., Ju O Seti, Y.B.Grynyshyn, O.M.Voitsekhivska // arXiv preprint arXiv:1407.2431

[127] Decar L. An exactly solvable Schrödinger equation with smooth position-dependent mass / L. Decar, L. Chetouani, T.F. Hamman // J. Math. Phys. – 1998. – V.39, Iss.5. – P. 2551 - 2563.

[128] Блажиевский Л.Ф. Интегрирование по путям и упорядочивание операторов / Л.Ф. Блажиевский // ТМФ. – 1979. – Т.40, No.1. – С. 51 - 63.

[129] Vakarchuk I.O. The Kepler problem in Dirac theory for a particle with position-dependent mass / I.O. Vakarchuk // J. Phys. A. – 2005. – V.38, No. 21. – P. 4727 - 4734.

[130] Vakarchuk I.O. On Dirac theory in the space with deformed Heisenberg algebra: Exact solutions / I.O. Vakarchuk // J. Phys. A. – 2005. – V.38, No.34. – P. 7567 - 7576.

[131] Bagchi B. New approach to (quasi)-exactly solvable Schrödinger equations with a position-dependent effective mass / B. Bagchi, P. Gporain, C. Quesne et. all. // Europhys.Lett. – 2005. – V.72, No.2. – P. 155 - 161.

[132] Einevoll G.T. Operator ordering in effective-mass theory for heterostructures. I. Comparison with exact results for superlattices, quantum wells, and localized potentials / G.T. Einevoll, P.C. Hemmer, J. Thomsen // Phys. Rev. B. – V.42, No.6, – P. 3485 - 3496.

[133] Einevoll G.T. Operator ordering in effective-mass theory for heterostructures. II. Strained systems / G.T. Einevoll // Phys. Rev. B. – 1990 – V.42, No.6. – P. 3497 - 3502.

[134] Mazharimousavi S.H. Classical and quantum quasi-free position-dependent mass: Pöschl–Teller and ordering ambiguity / S Habib Mazharimousavi, Omar Mustafa // Phys. Scr. – 2013 – V.87, No.5. – P.055008(10 p).

[135] Young K. Position-dependent effective mass for inhomogeneous semiconductors / K.Young // Phys. Rev. B. – 1989 – V.39, No.16. – P. 13434 - 13441.

[136] Vubangsil M. New kinetic energy operator for variable mass systems / M. Vubangsi, M. Tchoffo, L. C. Fai // Eur.Phys. J. Plus. – 2014 – V.129, No.6. – P.105(7 p)

[137] Qiong-Tao Xie. New quasi-exactly solvable double potentials / Qiong-Tao Xie // J.Phys.A. – 2012. – V.45, No.17. – P. 175302(7pp).

[138] Quesne C. Revisiting (quasi)-exactly solvable rational extensions of the Morse potential / C. Quesne // Int. J. Mod. Phys. A. – 2012 – V.27, No.13. – P. 1250073(18pp).

[139] Cooper F. Supersymetry in quantum mechanics / F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme // Physics Reports. – 1995. – V.251, Iss.5-6. – P.267 - 385.