Канонічні перетворення

1. Знайти канонічне перетворення, що відповідає твірній функції
   (a) $F_1(q,Q) = \sum q_i Q_i$ (b) $F_2(q,P,t) = qP + (bq - aP)t$, де a, b — сталі.

2. Знайти твірну функцію виду $F_3(p,Q)$, що приводить до того ж канонічного перетворення, що й $F_2(q,P) = q^2 e^P$.

3. До гамільтоніану $H = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{m\omega^2 q^2}{2}$ застосовують канонічне перетворення, що описується твірною функцією $F_1(q,Q) = \dfrac{1}{2} m\omega q^2 \mathrm{ctg} Q$. Знайти
   (a) $H(P,Q)$ (b) $\{Q,P\}_{qp}$ (c) $\{q,p\}_{QP}$
   (d) твірні функції $F_2(q,P)$, $F_3(p,Q)$, $F_4(p,P)$, які ведуть до того самого канонічного перетворення.

4. Відома функція Гамільтона системи з двома степенями вільності $H = \dfrac{1}{2}[p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + (q_2 - q_1)^2 + q_2^2]$. Знайти коефіцієнти a_1, a_2 твірної функції канонічного перетворення $F_1 = a_1^2 (q_1 + q_2)^2 \operatorname{ctg} Q_1 + a_2^2 (q_1 - q_2)^2 \operatorname{ctg} Q_2$, при якому гамільтоніан набуває вигляду $H = P_1 + \sqrt{3} P_2$.

5. Показати, що перетворення

$$x = X\cos\lambda + \frac{P_y}{m\omega}\sin\lambda, \qquad y = Y\cos\lambda + \frac{P_x}{m\omega}\sin\lambda,$$
$$p_x = -m\omega Y \sin\lambda + P_x\cos\lambda, \quad p_y = -m\omega X\sin\lambda + P_y\cos\lambda$$

   є канонічним. Знайти нову функцію Гамільтона $H(X,Y,P_x,P_y)$, якщо гамільтоніан у старих змінних $H(x,y,p_x,p_y) = \dfrac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \dfrac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$.

6. Показати, що перетворення, записане нижче, є канонічним.

$$x = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2P_1}\sin Q_1 + P_2), \quad y = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2P_1}\cos Q_1 + Q_2),$$
$$p_x = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(\sqrt{2P_1}\cos Q_1 - Q_2), \quad p_y = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(-\sqrt{2P_1}\sin Q_1 + P_2).$$

7. Довести, що при канонічному перетворенні виконуються такі рівності:
   (a) $\left(\dfrac{\partial Q_i}{\partial p_j}\right)_{qp} = -\left(\dfrac{\partial q_j}{\partial P_i}\right)_{QP}$ (b) $\left(\dfrac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right)_{qp} = \left(\dfrac{\partial p_j}{\partial P_i}\right)_{QP}$
   (c) $\left(\dfrac{\partial P_i}{\partial p_j}\right)_{qp} = \left(\dfrac{\partial q_j}{\partial Q_i}\right)_{QP}$ (d) $\left(\dfrac{\partial P_i}{\partial q_j}\right)_{qp} = -\left(\dfrac{\partial p_j}{\partial Q_i}\right)_{QP}$